Методические рекомендации
для выполнения практических работ
по теме *Производная функции и её приложения.*

Цель: *сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом видах, находить производные сложных функций, знать геометрический смысл производной, применять правило Лопиталя для нахождения пределов.*

1. Приращение аргумента и приращение функции

Пусть дана функция $f(x)$. Зафиксируем некоторое значение x. Дадим переменной x произвольное *приращение* Δx. В точке $x+\Delta x$ функция будет иметь значение $f(x+\Delta x)$. Разность между новым значением функции $f(x+\Delta x)$и ее старым значением $f(x)$ называется приращением функции и обозначается Δy. Таким образом, приращением функции называется величина

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Пример

Пусть $f(x)=x^2$, тогда $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2$. Найдем Δy:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\cdot\Delta x+\Delta x^2-x^2 = 2x\cdot\Delta x+\Delta x^2.$$

2. Понятие производной.

Пусть $y=f(x)$ — произвольная функция переменной x. Зафиксируем некоторое значение аргумента x и вычислим соответствующее значение функции $f(x)$. Придадим аргументу приращение Δx, получим новое значение $x+\Delta x$и вычислим соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Составим отношение

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ и рассмотрим предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Этот предел называется *производной* функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается y', y'_x , $f'(x)$ или $\frac{dy}{dx}$. Таким образом, *производной* называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

3. Геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0. Тогда к графику функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ можно провести касательную, уравнение которой имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

В этом уравнении $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ – где α – угол наклона касательной к оси Ox.

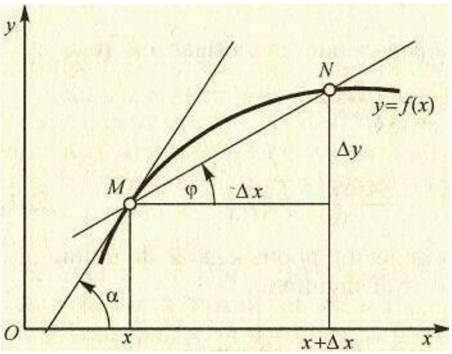

Рис.2.1

Таким образом, геометрически производная есть угловой коэффициент касательной к кривой в рассматриваемой точке.

4. Физический смысл производной

Пусть точка движется по прямой так, что $S = f(t)$ – путь, пройденный точкой к моменту времени t. Тогда путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt от момента t до момента $t+\Delta t$, равен $\Delta S = f(t+\Delta t) - f(t)$. В этом случае

$$\vartheta_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

есть средняя скорость точки за промежуток времени от t до $t+\Delta t$.

Скоростью ϑ точки в данный момент называется предел ее средней скорости за промежуток времени Δt, т.е.

$$\vartheta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Из (1.2) и определения производной (1.1) следует, что $\vartheta = S'(t)$, т.е. производная от пути по времени при прямолинейном движении есть скорость.

5. Правила вычисление производных

Справедливы следующие формулы, выражающие правила дифференцирования суммы, произведения, частного функций, а также вычисления производной от постоянной величины C.

1) *Производная постоянной величины* C *равна нулю*:

$$C' = 0$$

2) *Производная суммы равна сумме производных*:

$$(u + \vartheta)' = u' + \vartheta'.$$

Пример 1

$$\left(x^2+tgx\right)'=\left(x^2\right)'+\left(tgx\right)'=2x+\frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) *Производная произведения*:

$$\left(u\vartheta\right)'=u'\vartheta+u\vartheta'.$$

Пример 2

$$\left(x^2\cos x\right)'=\left(x^2\right)'\cos x+x^2\left(\cos x\right)'=2x\cos x-x^2\sin x.$$

4) *Постоянную можно выносить за знак производной*:

$$\left(Cu\right)'=Cu'.$$

Это правило является следствием правила 1) и правила 3).

Пример 3

$$\left(4\sin x\right)'=4\left(\sin x\right)'=4\cos x.$$

5). *Производная частного*:

$$\left(\frac{u}{\vartheta}\right)'=\frac{u'\vartheta+u\vartheta'}{\vartheta^2}.$$

Здесь предполагается, что рассматриваемые значения знаменателя не равны нулю.

Пример 4

$$\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'=\frac{\left(x+1\right)'\left(x-2\right)-\left(x+1\right)\left(x-2\right)'}{\left(x-2\right)^2}=\frac{x-2-\left(x+1\right)}{\left(x-2\right)^2}=$$

$$=\frac{x-2-x-1}{\left(x-2\right)^2}=-\frac{3}{\left(x-2\right)^2}.$$

6. Производная сложной функции.

Таблица производных

Пусть $y=y\left(u\right)$ где $u=u\left(x\right)$, тогда $y\left(u\left(x\right)\right)$ называется сложной функцией от переменной *x*. Рассмотрим примеры сложных функций.

Пример 5

$y=\cos u$, $u=2x$, тогда $y=\cos 2x$ – сложная функция переменной *x*.

Пример 6

$y=\sin u$, $u=x^2$, тогда $y=\sin x^2$ – сложная функция переменной *x*.

Пример 7

$y = \ln u$, $u = \sin x$, тогда $y = \ln(\sin x)$ – сложная функция переменной x.

Пример 8

$y = \log_2 u$, $u = \cos x$, $x = t^2$, тогда $y = \log_2\left(\cos t^2\right)$– сложная функция переменной t.

Пусть $y(u)$ имеет производную по переменной u, а $u(x)$ – по переменной x. Рассмотрим вопрос о нахождении производной сложной функции $y(u(x))$ по x. Используя определение производной, последовательно получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Таким образом, если сложную функцию записать в виде цепочки $y = y(u)$, $u = u(x)$, то производная от y по x вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{или} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (2.1)$$

Пример 9

Найти производную функции $y = \cos 2x$. Положим $u = 2x$, тогда $y = \cos u$ и по формуле (2.1) получаем

$$y'_x = (\cos u)'_u \cdot (2x)'_x = (-\sin u) \cdot 2 = -2\sin 2x.$$

Пример 10

Найти производную функции $y = \sin x^2$.

Решение

$$y' = \left(\sin x^2\right)' = \cos x^2 \cdot \left(x^2\right)' = 2x \cdot \cos x^2.$$

В таблице производных 2.1 все формулы приведены при условии, что $u = u(x)$, $\vartheta = \vartheta(x)$(в формуле 14 табл. 2.1).

Таблица 2.1

1	$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$	8	$(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
2	$\left(a^u\right)' = \left(a^u\right) \ln a \cdot u'$	9	$(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
3	$\left(e^u\right)' = \left(e^u\right) u'$	10	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
4	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$	11	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
5	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$	12	$(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
6	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	13	$(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	14	$u^\vartheta = \vartheta \cdot u^{\vartheta-1} \cdot u' + u^\vartheta \ln u \cdot \vartheta'$

7. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ задана на промежутке X и имеет на нем производную $f'(x)$. Производная от производной, если она существует, называется *производной второго порядка (второй производной)* функции $f(x)$ и обозначается y'', или y''_{x^2}, $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Итак, по определению $y''_{x^2} = (y'_x)'_x$.

Аналогично определяется *производная 3-го порядка*: $y''' = (y'')'$ Производная от производной (n–1)-го порядка называется *производной n-го порядка* или *n-й производной* и обозначается $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$ или $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Таким образом, по определению

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' \text{ или } \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Выполнить задания: Найдите производные следующих функций

№	Задания	№	Задания
1)	$4x^{2,5} + tg3x$	8)	$e^{\sqrt{x}}$
2)	$(4x+1)^2$	9)	$\cos\frac{x^3}{3}$
3)	$\frac{1}{x-3}$	10)	$\ln tg\frac{x}{2}$
4)	$\frac{x+2}{x}$	11)	$(x-1)e^x$
5)	$\frac{1}{x^2}$	12)	$(x^2–4x+8)e^{x/2}$
6)	$1–2x^3$	13)	$(x–1)\sqrt{x}$
7)	$\sqrt{1+x^2}$	14)	$x^2(2x–1)$

Ответы

№	Ответы	№	Ответы
1)	$10x^{1,5}+\frac{3}{cos^2 3x}$	8)	$\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
2)	$8(4x+1)$	9)	$-\frac{3}{2}x^2\sin\frac{x^3}{2}$
3)	$-\frac{1}{(x-3)^2}$	10)	$\frac{1}{\sin x}$
4)	$-\frac{2}{x^2}$	11)	xe^x
5)	$-\frac{2}{x^3}$	12)	$\frac{x^2}{2}e^{\frac{x}{2}}$
6)	$-6x^2$	13)	$\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$
7)	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	14)	$6x^2-2x$

8. Правило Лопиталя

Теорема 2.1. (Теорема Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \notin U(x_0)$, $x \neq x_0$. Тогда если $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (или $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$) и существует $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Если отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ в свою очередь представляет собой неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то правило Лопиталя можно применять второй раз и т. д.

Пример 10

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{5x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)'}{5\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{10x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)'}{x'} = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{1} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{1} = \frac{2}{5}.$$

Пример 11

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

Пример 12

Найти $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$.

Решение

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = -\lim_{x\to 0+} x = 0$$

Выполнить задания

Найти пределы, используя правило Лопиталя.

№	Задания	Ответы
1)	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{x^2-5x+4}$;	-8/3
2)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1}{\operatorname{arctg} x}$.	-5
3)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{1-\cos x}$.	2
4)	$\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{1-3x}$;	1/3
5)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin x}-1}{\sin 3x}$.	log(4)/3
6)	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$	3