Тема: Диференциалные уравнения с разделенными переменными

<u>Задание:</u>

1. Изучить теоретический материал.

2. Выполнить самостоятельную работу и отправить на эл. почту anzhelika-sedova@mail.ru до 11.04.20 до 15.00.

Вариант 1: Агарков – Колпаков;

Вариант 2: Кореньков – Шепелев.

Перечень справочной литературы :

1. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.
2. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.
3. Шипачев В.С. Основы высшей математика: учебник для вузов. -М. Высш.шк., 2014 г.
4. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. -М. Высш.шк., 2016 г.

Краткие теоретические сведения

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными имеют вид f(y)dy=g(x)dx. К ним сводятся многие дифференциальные уравнения первого порядка. В общем случае решение такого уравнения — это интегрирование обеих частей:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx.$$

Однако оставлять ответ в таком виде не принято. Нужно взять интегралы от обеих функций, если это возможно.

<u>Замечание</u>

Другая форма записи дифференциального уравнения с разделенными переменными: f(y)dy+g(x)dx=0. Его общее решение, заданное в неявном виде, выглядит так:

$$\int f(y)dy + \int g(x)dx = C$$

и называется общим интегралом уравнения.

Проиллюстрируем решение дифференциальных уравнений с разделенными переменными конкретными примерами.

Примеры.

Решить уравнение

1) $\cos y dy + 2x dx = 0$.

Решение.

Переносим слагаемое с x в левую часть и интегрируем:

$$\cos y dy = -2x dx$$

$$\int \cos y dy = -2\int x dx$$

Получаем

$$\sin y = -2\cdot\frac{x^2}{2} + C, \Rightarrow \sin y + x^2 = C.$$

Общее решение записано в виде неявно заданной функции: F(x;y)=0.

$$2) e^{5y}dy + \frac{4x-5}{x^2-5x+12}dx = 0.$$

Решение.

Переносим слагаемое с иксом в левую часть и интегрируем:

$$\int e^{5y}dy = -\int \frac{4x-5}{x^2-5x+12}dx$$

Замечаем, что $(x^2-5x+12)'=4x-5$. Значит, выражение $x^2-5x+12$ можно подвести под знак дифференциала: $d(x^2-5x+12)=(4x-5)dx$,

$$\int e^{5y}dy = -\int \frac{d(x^2-5x+12)}{x^2-5x+12}$$

$$\frac{1}{5}e^{5y} = -\ln(x^2-5x+12) + C, \Rightarrow \frac{1}{5}e^{5y} + \ln(x^2-5x+12) = C.$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{y}}dy + \sin x \cos^4 x dx = 0.$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}dy = -\sin x \cos^4 x dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}dy = -\int \sin x \cos^4 x dx$$

В правой части — табличный интеграл. В левой — можно подвести косинус под знак интеграла. Но ради разнообразия сделаем замену:

cos x=t, отсюда dt = (cos x)’dx=-sinxdx. Отсюда

$$2\sqrt{y} = \int t^4 dt, \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{t^5}{5} + C, \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{\cos^5 x}{5} + C,$$

и можно записать решение в виде общего интеграла

$$2\sqrt{y} - \frac{\cos^5 x}{5} = C,$$

либо выразить y через x:

$$2\sqrt{y} = \frac{\cos^5 x}{5} + C_1$$

Умножаем обе части равенства на 2, затем возводим в квадрат:

$$\sqrt{y} = \frac{2\cos^5 x}{5} + 2C_1, \Rightarrow y = \frac{4\cos^{10} x}{25} + 4C_1{}^2$$

Обозначим

$$4{C_1}^2 = C, \Rightarrow y = \frac{4\cos^{10}x}{25} + C.$$

Здесь удалось выразить ответ в виде функции в явном виде: y=f(x).

Самостоятельная работа

Задание № 1: Проверить подстановкой, что данная функция является общим решением (интегралом) данного дифференциального уравнения:

Вариант 1

1. $x^2y' - 2xy = 3; y = 3x^2 - \frac{1}{x};$
2. $dy + ytgxdx = 0; y = 2\cos x;$
3. $y' - yctgx = ctgx; y = C\sin x - 1;$
4. $xy^e + 2y = e^{-x^3}; y = 3 - e^{-x^3};$
5. $dy = 3x2ydx; y = Ce^{x^3};$

Вариант 2

1. $xy' = y - 1; y = Cx + 1;$
2. $y'ctg + y = 2; y = \cos x + 2;$
3. $y'x^2 = 3 + 2xy; y = -\frac{1}{x} + 3x^2 + C;$
4. $y = xy + (y')^2; y = 2x + 4;$
5. $\frac{y}{x} = 3x - y'; y = \frac{C}{x} + x^2;$

Задание № 2. Решить дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными:

Вариант 1

1. $\frac{dy}{\sqrt{y}} - \frac{dx}{x} = 0;$
2. $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{x}};$
3. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1};$
4. $e^x dx = ydy;$
5. $2ydy = (1 - 3x^2)dx;$

Вариант 2

1. $tgtdt + \frac{ds}{s} = 0;$
2. $\sqrt{y}dy = 3\sqrt{x}dx;$
3. $dy = (x^2 - 1)dx;$
4. $\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x-1};$
5. $\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \frac{dx}{1+x^2};$

Критерии оценки:

верно решенные 5 - 6 уравнений – оценка «3»
верно решенные 7 - 8 уравнений – оценка «4»
верно решенные 9 - 10 уравнений – оценка «5»

Вариант 1: Алексеев – Лукашевич;
Вариант 2: Машнина – Шипков.