Тема: Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Цель: сформировать умение решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Перечень справочной литературы :

1. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.
2. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.
3. Шипачев В.С. Основы высшей математика: учебник для вузов. -М. Высш.шк., 2014 г.
4. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. -М. Высш.шк., 2016 г.

<u>Задание:</u>

1. Изучить теоретический материал, разобрать решенные примеры.

2. Выполнить самостоятельную работу и отправить ее на эл. почту anzhelika-sedova@mail.ru до 11.00.

Краткие теоретические сведения

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными – это уравнения вида $s(x)p(y)y'+q(x)r(y)=0$

Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

В исходном уравнении:

$$s(x)p(y)y'+q(x)r(y)=0 \qquad (1)$$

Выразим y' через дифференциалы:

$y'=\dfrac{dy}{dx}$;

$s(x)p(y)\dfrac{dy}{dx}+q(x)r(y)=0$;

Умножим на dx:

$s(x)p(y)dy+q(x)r(y)dx=0$;

Иногда уравнение задается в таком виде. Это означает, что переменные x и y равноправны.

Разделим уравнение на s(x)r(y):

$$\frac{p\left(y\right)dy}{r\left(y\right)}+\frac{q\left(x\right)dx}{s\left(x\right)}=0$$

Интегрируем:

$$\int\frac{p\left(y\right)dy}{r\left(y\right)}+\int\frac{q\left(x\right)dx}{s\left(x\right)}=C \qquad (2)$$

Поскольку мы делили на s(x)r(y), то получили интеграл уравнения при s(x)≠ 0 и r(y)≠ 0. Далее следует рассмотреть решения, определяемые уравнениями s(x)= 0 и r(y)= 0, которые могут давать несколько значений типа x = const, y = const, также удовлетворяющие исходному уравнению (1). Часть этих решений может уже содержаться в решении (2).

Примеры.1) Решить уравнение $y'=\sqrt[3]{y}x^2$

<u>Решение</u>.

Выразим y' через дифференциалы:

$$y'=\frac{dy}{dx};$$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{y}x^2$$

Умножим на dx и разделим на $\sqrt[3]{y}$. При y ≠ 0 уравнение принимает вид:

$$\frac{dy}{\sqrt[3]{y}}=x^2dx$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dy}{\sqrt[3]{y}}=\int x^2dx+C \qquad (3)$$

Вычисляем интегралы, применяя формулу из таблицы

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

интегралов:

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \int y^{-\frac{1}{3}} dy = \frac{1}{-\frac{1}{3}+1} y^{-\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}}$$

$$\left[-\frac{1}{3} + 1 = \frac{-1+3}{3} = \frac{2}{3} \right]; \left[\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \right]$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{2+1} \int x^{2+1} = \frac{1}{3} x^3$$

Подставляем в (3). В результате получаем общий интеграл уравнения:

$$\frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} x^3 + C \qquad (4)$$

Однако оставлять ответ в таком виде не принято. Нужно взять интегралы от обеих функций, если это возможно.

Замечание

Другая форма записи дифференциального уравнения с разделенными переменными: f(y)dy+g(x)dx=0. Его общее решение, заданное в неявном виде, выглядит так:

$$\int f(y)dy + \int g(x)dx = C$$

и называется общим интегралом уравнения.

Проиллюстрируем решение дифференциальных уравнений с разделенными переменными конкретными примерами.

Примеры.

Решить уравнение

1) $\cos y dy + 2x dx = 0$.

Решение.

Переносим слагаемое с x в левую часть и интегрируем:

$$\cos y dy = -2x dx$$

$$\int \cos y dy = -2 \int x dx$$

Получаем

$$\sin y = -2 \cdot \frac{x^2}{2} + C, \Rightarrow \sin y + x^2 = C.$$

Общее решение записано в виде неявно заданной функции: F(x;y)=0.

$$2) e^{5y} dy + \frac{4x-5}{x^2-5x+12} dx = 0.$$

Решение.

Переносим слагаемое с иксом в левую часть и интегрируем:

$$\int e^{5y} dy = -\int \frac{4x-5}{x^2-5x+12} dx$$

Замечаем, что $(x^2-5x+12)'=4x-5$. Значит, выражение $x^2-5x+12$ можно подвести под знак дифференциала: $d(x^2-5x+12)=(4x-5)dx$,

$$\int e^{5y} dy = -\int \frac{d(x^2-5x+12)}{x^2-5x+12}$$

$$\frac{1}{5} e^{5y} = -\ln(x^2-5x+12) + C, \Rightarrow \frac{1}{5} e^{5y} + \ln(x^2-5x+12) = C.$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{y}} dy + \sin x \cos^4 x dx = 0.$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} dy = -\sin x \cos^4 x dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = -\int \sin x \cos^4 x dx$$

В правой части — табличный интеграл. В левой — можно подвести косинус под знак интеграла. Но ради разнообразия сделаем замену:

cos x=t, отсюда dt = (cos x)’dx=-sinxdx. Отсюда

$$2\sqrt{y} = \int t^4 dt, \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{t^5}{5} + C, \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{\cos^5 x}{5} + C,$$

и можно записать решение в виде общего интеграла

$$2\sqrt{y} - \frac{\cos^5 x}{5} = C,$$

либо выразить y через x:

$$2\sqrt{y} = \frac{\cos^5 x}{5} + C_1$$

Умножаем обе части равенства на 2, затем возводим в квадрат:

$$\sqrt{y} = \frac{2\cos^5 x}{5} + 2C_1, \Rightarrow y = \frac{4\cos^{10} x}{25} + 4{C_1}^2$$

Обозначим

$$4{C_1}^2 = C, \Rightarrow y = \frac{4\cos^{10} x}{25} + C.$$

Здесь удалось выразить ответ в виде функции в явном виде: y=f(x).

Теперь рассмотрим случай, когда y = 0.

Поскольку y' = (0)' = 0 (производная от постоянной всегда равна нулю), то

выражение y = 0 удовлетворяет исходному уравнению и не входит в полученное решение $\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}x^3+C$ (подставим y = 0: $\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}0^{\frac{2}{3}}=0=\frac{1}{3}x^3+C$ - уравнение не выполняется ни при каком значении постоянной C)
Поэтому к общему интегралу (4) добавим решение y = 0.

<u>Ответ:</u>

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}x^3+C;\quad y=0$$

2) Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx}=y(y+2)$.

Решение.

В данном случае $p(x) = 1$ и $h(y) = y(y+2)$. Разделим уравнение на $h(y)$ и перенесем dx в правую часть:

$$\frac{dy}{y(y+2)}=dx.$$

Заметим, что при делении мы могли потерять решения $y = 0$ и $y = -2$ в случае когда $h(y)$ равно нулю. Действительно, убедимся, что $y = 0$ является решением данного дифференциального уравнения.

Пусть y = 0, dy = 0.Подставляя это в уравнение, получаем: 0 = 0. Следовательно, $y = 0$ будет являться одним из решений. Аналогично можно проверить, что $y = -2$ также является решением уравнения.

Вернемся обратно к дифференциальному уравнению и проинтегрируем его:

$$\int\frac{dy}{y(y+2)}=\int dx+C.$$

Интеграл в левой части можно вычислить методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+2},$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y(y+2)} = \frac{A(y+2)+By}{y(y+2)},$$

$$\Rightarrow 1 \equiv Ay + 2A + By,$$

$$\Rightarrow 1 \equiv (A+B)y + 2A,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A=1 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Таким образом, мы получаем следующее разложение рациональной дроби в подынтегральном выражении:

$$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right)dy = \int dx + C$$

$$\frac{1}{2}\left(\int\frac{dy}{y} - \int\frac{dy}{y+2}\right) = \int dx + C$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln|y| - \ln|y+2|\right) = x + C$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = x + C$$

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = 2x + 2C.$$

Переименуем константу: $2C = C_1$. В итоге, окончательное решение уравнения записывается в виде:

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = 2x + C_1, \quad y = 0, \quad y = -2.$$

Общее решение здесь выражено в неявном виде. В данном примере мы можем преобразовать его и получить ответ в явной форме в виде функции $y = f(x, C_1)$, где C_1 − некоторая константа. Однако это можно сделать не для всех дифференциальных уравнений.

3) Решить дифференциальное уравнение $\left(x^2+4\right)y' = 2xy$.

<u>*Решение.*</u>

Запишем данное уравнение в следующем виде:

$$\left(x^2+4\right)dy = 2xydx.$$

Разделим обе части на $(x^2 + 4)y$:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{x^2+4}.$$

Очевидно, что $x^2 + 4 \neq 0$ для всех действительных x. Проверим, что $y = 0$ является является одним из решений уравнения. После подстановки $y = 0$ и $dy = 0$ в исходное дифференциальное уравнение видно, что функция $y = 0$ действительно является решением уравнения.

Теперь можно проинтегрировать полученное уравнение:

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{2xdx}{x^2+4} + C, \quad \Rightarrow \ln|y| = \int\frac{d\left(x^2\right)}{x^2+4} + C.$$

Заметим, что $dx^2 = d(x^2 + 4)$. Следовательно,

$$\ln|y| = \int\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4} + C, \quad \Rightarrow \ln|y| = \ln\left(x^2+4\right) + C.$$

Представим константу C как lnC_1, где $C_1 > 0$. Тогда

$$\ln|y| = \ln\left(x^2+4\right) + \ln C_1,$$

$$\ln|y| = \ln\left(C_1\left(x^2+4\right)\right),$$

$$|y| = C_1\left(x^2+4\right),$$

$$y = \pm C_1\left(x^2+4\right).$$

Таким образом, заданное дифференциальное уравнение имеет следующие решения:

$$y = \pm C_1\left(x^2+4\right), \quad y = 0, \quad \text{где} \quad C_1 > 0.$$

Полученный ответ можно упростить. В самом деле, введем произвольную константу C, принимающую значения от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда решение можно записать в виде:

$$y = C\left(x^2+4\right).$$

При $C = 0$, оно становится равным $y = 0$.

4) Найти все решения дифференциального уравнения $y' = -xe^y$.

Решение.

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = -xe^y,$$

$$\frac{dy}{e^y} = -xdx,$$

$$e^{-y}dy = -xdx.$$

Очевидно, что деление на e^y не приводит к потере решения, поскольку $e^y > 0$. После интегрирования получаем

$$\int e^{-y}dy = \int(-x)dx + C,$$

$$-e^{-y} = -\frac{x^2}{2} + C \quad \text{или} \quad e^{-y} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Данный ответ можно выразить в явном виде:

$$-y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right) \quad \text{или} \quad y = -\ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

В последнем выражении предполагается, что константа $C > 0$, чтобы удовлетворить области определения логарифмической функции.

4) Найти частное решение дифференциального уравнения

$$x(y+2)y' = \ln x + 1$$

при условии $y(1) = -1$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на x:

$$x(y+2)\frac{dy}{dx} = \ln x + 1,$$

$$(y+2)dy = \frac{(\ln x + 1)dx}{x}.$$

Мы предполагаем, что $x \neq 0$, поскольку областью определения исходного уравнения является множество $x > 0$.

В результате интегрирования получаем:

$$\int(y+2)dy = \int\frac{(\ln x + 1)dx}{x} + C.$$

Интеграл в правой части вычисляется следующим образом:

$$\int\frac{(\ln x + 1)dx}{x} = \int(\ln x + 1)d(\ln x) = \int(\ln x + 1)d(\ln x + 1) = \frac{(\ln x + 1)^2}{2}.$$

Следовательно, общее решение в неявной форме имеет вид:

$$y^2 + 2y = \frac{(\ln x + 1)^2}{2} + C,$$

$$2y^2 + 4y = (\ln x + 1)^2 + C_1,$$

где $C_1 = 2C$ − постоянная интегрирования.

Найдем теперь значение C_1, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = -1$:

$$2(-1)^2 + 4(-1) = (\ln 1 + 1)^2 + C_1,$$

$$\Rightarrow C_1 = -3.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения с заданным начальным условием (задача Коши) описывается алгебраическим уравнением:

$$2y^2 + 4y = (\ln x + 1)^2 - 3.$$

Самостоятельная работа

Вариант 1: Алексеев – Лукашевич;
Вариант 2: Машнина – Шипков.

Задание № 1. Найти частное решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

Вариант 1

1. $ydx = ctgxdy = 0; y(\frac{\pi}{3}) = -1;$
2. $y' + \frac{tgx}{ctgy} = 0; y = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3};$
3. $(1 + x^2)dy - 2xydx = 0; y = 4; x = -1;$
4. $(1 + x^3)dy = 3x^2 ydx; y = 2; x = 0;$
5. $(1 + y^2)dx = xydy; y = 1; x = 2.$

Вариант 2

1. $2ydx = (1 + x)dy; y(1) = 4;$
2. $\frac{dy}{\sqrt{y}} + dx = \frac{dx}{\sqrt{x}}; y = 1; x = 0;$
3. $(2x - 1)dy = (y + 1)dx; y(5) = 0;$
4. $(1 - x^2)dy + xydx = 0; y = 4; x = 0;$
5. $(1 + x^2)dy - 2x(y + 3)dx = 0; y(0) = -1.$

Критерии оценки:

верно решенные 3 уравнения – оценка «3»
верно решенные 4 уравнения – оценка «4»

верно решенные 5 уравнений – оценка «5»