Тема: Выполнение операций над множествами

Цель: сформировать умение выполнять операции над множествами.

Используемые источники

Основные источники:

1. *Пехлецкий И.Д.* Математика: Учебник для студ. образоват. учреждений сред.проф. образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2014.
2. *Богомолов Н.В*. Математика 5-е изд., пер. и доп. Учебник для СПО – М: Издательство Юрайт, 2015
3. *Богомолов Н.В.* Задачи по математике с решениями.: Учеб.пособие для средних проф. учеб. заведений. – М.: Издательство Юрайт, 2015

Дополнительные источники:

1. Сайт: http://school-collection.edu.ru
2. «Математика»: учебно-методическая газета.
3. «Квант». Форма доступа: www.kvant.mirror1.mccme.ru

Электронная библиотека. Форма доступа: www.math.ru/lib

Задание:

1. Изучить теоретический материал, разобрать решенные примеры.

2. Выполнить самостоятельную работу и отправить ее на эл. почту anzhelika-sedova@mail.ru до 15.00.

Теоретические сведения.

Под ***множеством*** понимается любая совокупность некоторых объектов. Эти объекты называются элементами множества. Множества обозначают большими буквами, а элементы - маленькими.

То, что элемент a ***принадлежит множеству*** A (то есть является элементом множества A) записывают так $a \in A$, а то что элемент b не принадлежит множеству A (не является его элементом) записывают так $b \notin A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента называется ***пустым*** и обозначается символом $\emptyset$.

Запись $A \subset B$ (A содержится в B) означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B; в этом случае множество A называется подмножеством множества B. Множества A и B называют ***равными*** ($A=B$),если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Существует два основных ***способа задания (описания) множеств***.

а) Множество A определяется непосредственным перечислением всех своих элементов $a1, a2, \dots, an$, то есть записывается в виде

$$A=\{a1, a2, \dots, an\}.$$

Например, множество простых чисел от 10 до 20 можно записать так: $\{11,13,17,19\}$.

б) Множество A определяется как совокупность тех и только тех элементов из некоторого основного множества T,которые обладают общим свойством α. В этом случае используется обозначение

$$A=\{x\in T|\alpha(x)\},$$

где запись $\alpha(x)$ означает, что элемент x обладает свойством α.

Например, $[0,1)=\{x\in R|0\leq x<1\}$.

Объединением множеств A и B называется множество

$$A\cup B=\{x|(x\in A)\vee(x\in B)\}$$

Пересечением множеств и называется множество

$$A\cap B=\{x|(x\in A)\wedge(x\in B)\}$$

Операции объединения и пересечения обладают следующими свойствами:

1) коммутативности

$$A\cup B=B\cup A;A\cap B=B\cap A;$$

2) ассоциативности

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

3) дистрибутивности

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C);(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C);$$

4) идемпотентности

$$A\cup A=A;A\cap A=A.$$

Множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B, называется ***разностью множеств*** A и B:

$$A\setminus B=\{x|(x\in A)\wedge(x\notin B)\}.$$

Если $A\subset B$, то $B\setminus A$ называют ***дополнением*** множества A до множества B:$A'B$.

Если, в частности, $A-$ подмножество некоторого универсального множества U, то разность $U\setminus A$ обозначается символом $\overline{A}$ или A' и называется ***дополнением*** множества A (до множества U).

Из определения дополнения множества следуют равенства

$$A\cup A'=U;A\cap A'=\emptyset,(A')'=A.$$

Симметрической разностью множеств A и B называют множество $A\Delta B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат только одному из множеств A или B, то есть

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

Для любых подмножеств A и B множества U справедливы следующие равенства, которые называют законами двойственности или законами де Моргана:

$$(A\cup B)'=A'\cap B';(A\cap B)'=A'\cup B'.$$

Примеры:

Доказать справдливость равенств

1) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

Доказательство.

$x\in(A\cap B)'\Leftrightarrow x\notin(A\cap B)\Leftrightarrow x\notin A\vee x\notin B\Leftrightarrow x\in A'\vee x\in B'\Leftrightarrow$
$x\in(A'\cup B')\Leftrightarrow(A\cap B)'=A'\cup B'$.

Что и требовалось доказать.

2) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.

Доказательство.

$x\in(A\setminus B)\setminus C\Leftrightarrow a\in A\setminus B\wedge a\notin C\Leftrightarrow(a\in A\wedge a\notin B)\wedge a\notin C\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a\in A\wedge(a\notin B\wedge a\notin C)\Leftrightarrow a\in A\wedge a\notin(B\cup C)\Leftrightarrow a\in A\setminus(B\cup C)$.

Что и требовалось доказать.

3) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$.

Доказательство.

$a\in A\setminus(A\setminus B)\Leftrightarrow(a\in A)\wedge(a\notin A\setminus B)\Leftrightarrow$
$(a\in A)\wedge((a\notin A)\vee(a\in B))\Leftrightarrow$
$((a\in A)\wedge(a\notin A))\vee((a\in A)\wedge(a\in B))\Leftrightarrow$
$(a\in A)\wedge(a\in B)\Leftrightarrow a\in A\cap B$.

Что и требовалось доказать.

4) $A\cup(B\setminus C)\supset(A\cup B)\setminus C$.

Доказательство.

$a\in(A\cup B)\setminus C\Leftrightarrow(a\in A\vee a\in B)\wedge a\notin C\Leftrightarrow$
$(a\in A\wedge a\notin C)\vee(a\in B\wedge a\notin C)\Rightarrow(a\in A)\vee(a\in B\wedge a\notin C)\Leftrightarrow$
$a\in A\cup(B\setminus C)$.

Что и требовалось доказать.

5) Установить, какая из двух записей верна:
$\{1,2\}\in\{1,2,\{1,2,3\}\}$ и $\{1,2\}\subset\{1,2,\{1,2,3\}\}$.

Решение.

Запись $\{1,2\}\in\{1,2,\{1,2,3\}\}$ означает, что элемент $\{1,2\}$ содержится в множестве, состоящем из трех элементов $\{1\}$, $\{2\}$, и $\{\{1,2,3\}\}$. Очевидно элемента $\{1,2\}$ среди данных трех элементов нет. Поэтому такая запись не верна.

Запись $\{1,2\}\subset\{1,2,\{1,2,3\}\}$ означает, что все элементы множества $\{1,2\}$ (то есть $\{1\}$, и $\{2\}$) содержатся в множестве $\{1,2,\{1,2,3\}\}$. Последнее множество состоит из элементов $\{1\}$, $\{2\}$, и $\{\{1,2,3\}\}$, поэтому данная запись верна.

Ответ: $\{1,2\}\subset\{1,2,\{1,2,3\}\}$.

6) $A=\{x\in R|x3-3x2+2x=0\}$.

Решение.

Найдем множество действительных решений уравнения $x3-3x2+2x=0$:

$x3-3x2+2x=x(x2-3x+2)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x1=0$.

Решим квадратное уравнение $x2-3x+2=0$.

$D=32-4\cdot2=1$.

$$x2=3+12=2,x3=3-12=1.$$

Все корни уравнения действительные, поэтому запишем ответ:

Ответ: $\{0,1,2\}$.

7) $A=\{x\in R|x+1x\leq2,x>0\}$.

Решение.

Решим неравенство $x+1x\leq2$:

$x2+1x\leq2xx$.

Поскольку $x>0$, то $x2+1\leq2x$. Решим квадратное уравнение

$x2-2x+1=0\Rightarrow(x-1)2=0\Rightarrow x1,2=1$.

Так как $y=x2-2x+1$ это парабола, направленная осями вверх, то при всех остальных значениях x, функция будет положительна.

Таким образом, решение неравенства $x+1x\leq2$ при условии $x>0$:

$x=1$.

Ответ: $\{1\}$.

Самостоятельная работа

1) Установить, какая из двух записей верна:
$\{1,2\}\in\{1,2,\{1,2\}\}$ и $\{1,2\}\subset\{1,2,\{1,2\}\}$.

2) заданные множества задать перечислением всех своих элементов

а) $A=\{x\in N|x2-3x-4\leq 0\}$.

б) $A=\{x\in Z|14\leq 2x<5\}$.

3) Изобразить на координатной плоскости следующие множества:

а)$\{(x,y)\in R2|x+y-2=0\}$.

б)$\{(x,y)\in R2|x2-y2>0\}$.

в)$\{(x,y)\in R2|(x2-1)(y+2)=0\}$.

4) Описать перечислением всех элементов множества $A\cup B, A\cap B, A\setminus B, B\setminus A$.

$$A=\{x\in R|x2+x-20=0\}, B=\{x\in R|x2-x+12=0\}.$$

5) приняв отрезок за универсальное множество $T=[0,1]$, найти и изобразить на числовой оси дополнения следующих множеств:

а) $\{0,1\}$;

б) $\{1/4\}\cup[3/4,1)$.

Критерии оценки:
верно выполненные 70 % заданий – оценка «3»
верно выполненные 80 % заданий – оценка «4»
верно выполненные 90 % заданий – оценка «5»