Тема: Выполнение операций над высказываниями

Цель: сформировать умение выполнять операции над высказываниями

Используемые источники

Основные источники:

1. *Пехлецкий И.Д.* Математика: Учебник для студ. образоват. учреждений сред.проф. образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2014.
2. *Богомолов Н.В*. Математика 5-е изд., пер. и доп. Учебник для СПО – М: Издательство Юрайт, 2015
3. *Богомолов Н.В.* Задачи по математике с решениями.: Учеб.пособие для средних проф. учеб. заведений. – М.: Издательство Юрайт, 2015

Дополнительные источники:

1. Сайт: http://school-collection.edu.ru
2. «Математика»: учебно-методическая газета.
3. «Квант». Форма доступа: www.kvant.mirror1.mccme.ru

Электронная библиотека. Форма доступа: www.math.ru/lib

Задание:

1. Изучить теоретический материал, разобрать решенные примеры.

2. Выполнить самостоятельную работу и отправить ее на эл. почту anzhelika-sedova@mail.ru до 11.00.

Теоретические сведения

Логические операции над высказываниями

1. Отрицание.

Эта логическая операция соответствует в обыденной жизни частице «не».

Определение. Отрицанием высказывания x называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если высказывание *x* истинно.

Отрицание высказывания *x* обозначается $\overline{x}$ и читается не *x*. Логические значения высказывания $\overline{x}$ модно описать с помощью таблицы, которая называется *таблицей истинности*:

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

Пусть *x* высказывание. Так как $\overline{x}$ тоже высказывание, то можно образовать отрицание высказывания $\overline{x}$, то есть высказывание $\overline{\overline{x}}$, которое является двойным отрицанием высказывания x. Логические значения высказываний $\bar{\bar{x}}$ и x совпадают.

2. Дизъюнкция (логическое сложение).

Эта логическая операция соответствует союзу «или».

Определение. Дизъюнкцией двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний x или y истинно и ложным, если они оба ложны.

Дизъюнкция высказываний x, y обозначается $x \vee y$ и читается «x или y». Логические значения дизъюнкции описываются таблицей истинности:

X	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Высказывания x, y называются членами дизъюнкции.

Пример.

x – «5>3», y – «2>4». Тогда $x \vee y$ – «5>3» $\vee$ «2>4» истинно, так как истинно высказывание x.

В алгебре логики союз «или» всегда употребляется в неисключающем смысле. Из определения дизъюнкции и отрицания следует, что высказывание $x \vee \bar{x}$ всегда истинно.

3. Конъюнкция.

Эта логическая операция соответствует союзу «и».

Определение. Конъюнкцией двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания x, y истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкция высказываний x, y обозначается $x \wedge y$ и читается «x и y». Высказывания x, y называются членами конъюнкции. Логические значения конъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

X	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Пример.

x – «6 делится на 2», y – «6 делится на 3». Тогда $x \wedge y$ – «6 делится на 2»$\wedge$«6 делится на 3» истинно.

Из определения операции конъюнкции видно, что союз «и» в алгебре логики употребляется в том же смысле, что и в повседневной речи. Но в обычной речи не принято соединять союзом «и» два высказывания, далеких друг от друга по содержанию, а в алгебре логики рассматривается конъюнкция двух любых высказываний.

Из определения операций конъюнкции и отрицания следует, что высказывание $x \wedge \bar{x}$ всегда ложно.

4. Импликация.

Эта логическая операция соответствует словам «если…,то…».

Определение. Импликацией двух высказываний *x, y* называется новое высказывание, которое считается ложным, если *x* истинно, а *y* ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Импликация высказываний обозначается $x \rightarrow y$ и читается «если *x*, то *y*» или «из *x* следует *y*». Высказывание *x* называется *условием* или *посылкой,* а высказывание *y* – *следствием* или*заключением*.

Высказывание $x \rightarrow y$ называется *следованием* или *импликацией*. Логические значения операции импликации описываются следующей таблицей истинности:

X	*y*	$x \rightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Пример.

1) *x* – «12 делится на 6», *y* – «12 делится на 3». Тогда импликация $x \rightarrow y$ – «если 12 делится на 6, то оно делится на 3» истинна, так как истинна посылка *x*, и истинно заключение *y*.
2) *x* – «12 делится на 2 и 3», *y* – «12 делится на 7». Тогда импликация $x \rightarrow y$ – «если 12 делится на 2 и 3, то оно делится на 7» ложна, так как условие истинно, а заключение ложно.

Употребление слов «если…,то…» в алгебре логики отличается от употребления их в обыденной речи, когда, как правило, считается, что если высказывание *x* ложно, то высказывание «если*x*, то *y*» вообще не имеет смысла. Кроме того, строя предложение «если *x*, то *y*» в обыденной речи всегда подразумевается, что предложение *y* вытекает из предложения *x*.

Употребление слов «если…, то…» в математической логике не требует этого, так как в ней смысл высказываний не рассматривается.

Импликация играет важную роль в математических доказательствах, так как многие теоремы формулируются в условной форме «если *x*, то *y*». Если при этом известно, что *x* истинно и доказана истинность импликации $x \to y$ то истинно и заключение *y*. В этом случае пишут $x \Rightarrow y$ и говорят, что из *x* следует *y*. Это классическое правило вывода постоянно используется в математике.

5. Эквиваленция.

Эта логическая операция соответствует словам «тогда и только тогда, когда».

Определение. Эквиваленцией или эквивалентностью двух высказываний *x*, *y* называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания *x*, *y* либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях.

Эквиваленция высказываний *x*, *y* обозначается символом $x \leftrightarrow y$ и читается «для того чтобы *x*, необходимо и достаточно, чтобы *y*» или «*x* тогда и только тогда,

когда *y*». Логические значенияоперации эквиваленции описываются следую щей таблицей истинности:

X	*y*	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Высказывания *x*, *y* называются членами эквиваленции.

Пример.

x – «Треугольник АВС с вершиной А и основанием ВС равнобедренный», *y* – « $\angle$ B= $\angle$ C». Эквиваленция $x \leftrightarrow y$ – «Треугольник АВС с вершиной А и основанием ВС равнобедренный тогда и только тогда, когда $\angle$ B= $\angle$ C». Эквиваленция $x \leftrightarrow y$ истинна, так как высказывания *x* и *y* либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Эквивалентность играет важную роль в математических доказательствах. Известно, что значительное число теорем формулируется в виде необходимых и достаточных условий, то есть в форме эквивалентности. В этом случае, зная об истинности или ложности одного из двух членов эквивалентности и доказав истинность самой эквивалентности, делается вывод об истинности или ложности второго члена эквивалентности.

Самостоятельная работа

1. Даны простые высказывания:

А: “Петя умеет плавать”

В: “Сергей умеет прыгать”

С: “Алеша умеет стрелять”

Даны формулы сложных высказываний, составленные из этих простых. Прочтите их, используя смысл каждого простого высказывания:

1. А+В$\cdot\ \overline{C}$
2. $\overline{A}$ · В$\cdot\overline{C}$
3. А· В$\cdot\overline{C}$
4. А $\cdot\ \overline{B}\ \cdot$ С
5. А$\cdot\ \overline{C}\cdot\overline{B}$
6. $\overline{A\cdot B\cdot C}$

2. Даны простые высказывания:

“Данное число не кратное 3”

“Данное число больше 50”

Прочтите сложные высказывания:

1) А$\cdot\overline{B}$; 2) $\overline{A\cdot B}$; 3) $\overline{A}\cdot\overline{B}$

3. В состав истинного логического произведения входят три простых высказывания - А,В,С. Известно, что А и В - истинны. Может ли высказывание С быть одним из следующих:

а) “Дважды два равно семи”.

б) “Слоны живут в Африке и Индии”.

в) “5х + 3 = 11х”.

4. Дано высказывание: “Иванов является членом сборной команды “Алгоритм”. Какое из следующих высказываний есть логическим отрицанием данного?

а). Не Иванов является членом сборной команды “Алгоритм”.

б). Иванов является членом сборной команды не “Алгоритм”.

в). Иванов не является членом сборной команды “Алгоритм”.

г). Неверно, что Иванов является членом сборной команды “Алгоритм”.

5. Определите значения истинности высказываний:

а) “Если 16 делится на 4, то 16 делится на 2”.

б) “Если 17 делится на 4, то 17 делится на 2”.

в) “Если 18 делится на 4, то 18 делится на 2”.

г) “Если 18 делится на 2, то 18 делится на 4”.

д) “Если 2· 2=5, то 8^3 □ 500”.

е) “Если 2· 2=4, то 7^2 =81”.

ж) “Если телепатия существует, то некоторые физические законы требуют пересмотра”.

з) “16 делится на 4 тогда и только тогда, когда 16 делится на 2”.

и) “17 делится на 4 тогда и только тогда, когда 17 делится на 2”.

к) “18 делится на 4 тогда и только тогда, когда 18 делится на 2”.

л) “15 делится на 5 тогда и только тогда, когда 15 делится на 10”.

Критерии оценки:

верно выполненные 70 % заданий – оценка «3»

верно выполненные 80 % заданий – оценка «4»

верно выполненные 90 % заданий – оценка «5»