Тема: Вычисление вероятностей событий с использованием элементов комбинаторики

Перечень справочной литературы:

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. – М.: Образовательно-издательский центр «Академия», 2016
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике. – М: Издательский центр «Академия», 2016
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2017
4. Дадаян А.А. Математика: учеб.- М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2015

<u>Задание:</u>

1. Изучить теоретический материал, разобрать решенные примеры.

2. Выполнить самостоятельную работу и отправить ее на эл. почту anzhelika-sedova@mail.ru до 10.00.

Теоретический материал

Комбинаторика - раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Нас в комбинаторике будет интересовать возможность определения количественно различных подмножеств конечных множеств, для вычисления вероятности классическим способом.

Правило произведения. Пусть из некоторого конечного множества

1-й объект можно выбрать $к_1$ способами,

2-ой объект - $к_2$ способами, (1)

....

n-ый объект - $к_n$ способами.

Тогда произвольный набор, перечисленных n объектов, из данного множества можно выбрать $к_1 \cdot к_2 \cdot ... к_n$ способами.

Правило суммы. При выполнении условий (1), любой из объектов можно выбрать $к_1 + к_2 + к_3 + ... + к_n$ способами.

Обычно в комбинаторике рассматривается идеализированный эксперимент по выбору наудачу *k*элементов из *n.*

Размещением из n*элементов по к* называют любой упорядоченный набор из *к*элементов, принадлежащих *n* элементному множеству. Различные размещения отличны друг от друга или порядком элементов, или составом.

Число размещений из n элементов по к обозначается A_n^k и вычисляется по формуле

$$A_n^к = \frac{n!}{(n-к)!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$, $1!=1$, $0!=1$.

Перестановкой из n *элементов* называют размещение из n элементов по n. Число перестановок из n элементов обозначают P_n и вычисляют по

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

формуле

*Сочетанием из*n*элементов по*к называется любой набор из к элементов, принадлежащих n элементному множеству. Различные сочетания отличаются друг от друга только составом.

Число сочетаний из n элементов по к обозначается C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^к = \frac{A_n^к}{P_к} = \frac{n!}{(n-к)!\,к!}.$$

Решая комбинаторную задачу, прежде всего надо определиться, с каким из 3 основных понятий в данном случае имеете дело. Для этого необходимо решить 2 вопроса:

1. Все элементы данного множества используются или нет;

2. Важен порядок расположения элементов или нет.

Поможет ответить на эти вопросы

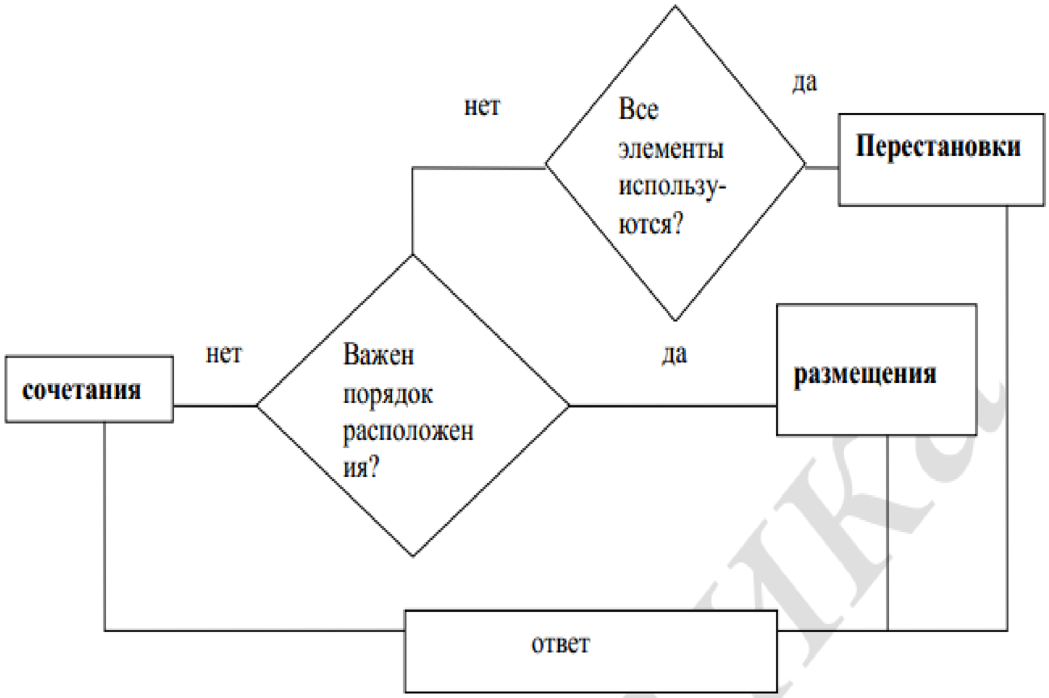
Шпаргалка:

Перестановки = множество + порядок

Сочетания = подмножество

Размещения = подмножество + порядок

Для распознавания ситуации, в которой надо использовать перестановки, сочетания или размещения удобно воспользоваться следующей блок-схемой:



Примеры решения задач

Пример 1. Сколько существует трехзначных чисел с разными цифрами?

Решение. В десятичной системе исчисления десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. На первом месте может стоять любая из девяти цифр (кроме нуля). На втором месте - любая из оставшихся 9 цифр, кроме выбранной. На последнем месте любая из оставшихся 8 цифр.

По правилу произведения, 9·9·8 = 648 трёхзначных чисел имеют разные цифры.

Пример 2. Сколько существует способов выбора одного карандаша из коробки, содержащей 5 красных, 7 синих, 3 зеленых карандаша.

Решение. Один карандаш, по правилу суммы, можно выбрать 5 + 7 + 3 = 15 способами.

Пример 3. В соревнованиях участвует 10 человек, трое из них займут 1,2,3 место. Сколько существует различныхвариантов?

Решение. Число различных вариантов равно

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{7!\,8\cdot 9\ 10}{7!} = 8\cdot 9\cdot 10 = 720.$$

Пример 4. Сколько существует способов расстановки 10 книг на полке?

Решение. Общее число способов расстановки определяется как число перестановок из 10 элементов и равно P = 10! = 3 628 800.

Пример 5. Сколько существует способов выбора трех человек из десяти?

Решение. В данном случае при выборе для нас важен только состав наборов по три человека, порядок выбора роли не играет, поэтому в отличие от примера 3 число способов выбора подсчитаем по формуле сочетаний

$$C_{10}^{3} = \frac{10}{(10-3)!3!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

Самостоятельная работа

Вариант 1: Алексеев – Лукашевич;
Вариант 2: Машнина – Шипков.

Вариант 1

1. Сколько можно образовать различных инициалов, если каждый человек имеет одну фамилию, имя, отчество? (количество букв в алфавите 30)
2. В азбуке Морзе буквы представляются последовательностями тире и точек с возможными повторениями. Сколько букв можно составить из 5 и менее символов?
3. В ящике 300 деталей. Известно, что 150 из них – I сорта, 120 – II сорта, а остальные – III сорта. Сколько существует способов извлечения из ящика двух деталей одного сорта?
4. Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.
5. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?
6. Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?
7. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные призы?
8. В урне 12 шаров. Среди этих шаров 3 белых и 9 черных. Сколько существует способов вынуть из урны 3 шара, один из которых черный?
9. В розыгрыше первенства по футболу среди вузов принимает участие 16 команд, при этом любые две команды играют между собой только один матч. Сколько всего календарных игр?
10. Сколькими способами можно распределить 3 путевки между 5 человеками, если:
    а) все путевки одинаковые;
    б) все путевки разные?

Вариант 2

1. Сколькими способами семь разных учебников можно поставить на полке в один ряд?
2. Установлено, что у преступника семизначный телефонный номер, в котором ни одна цифра не повторяется. Если тратить на проверку одного номера 1 минуту, то можно ли за 2 суток определить номер преступника?
3. Сколькими способами можно разложить 20 писем по 20 конвертам?
4. В ящике 20 шаров, среди которых 12 белых, остальные – черные. Отбирается наугад 2 шара. Сколькими способами можно отобрать:
а) 2 белых шара;
б) 2 черных шара;
в) 1 белый, 1 черный шары.
5. Сколькими способами на витрине можно расположить 14 видов напитков?
6. Из 20 человек надо выбрать председателя, секретаря и казначея. Сколько существует способов таких выборок?
7. В соревнованиях по шахматам участвует 20 участников. В финал попадут только трое. Каково число возможных финальных троек?
8. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех различных цветов, если имеется 5 видов ткани?
9. В коробке содержатся 6 одинаково пронумерованных кубика. Наудачу извлекаются все по одному кубику. Сколькими способами можно извлечь эти кубики?
10. Сколько различных чисел, меньше миллиона, можно записать с помощью цифр 8 и 9?

Критерии оценки

верно выполненные 5 - 6 заданий – оценка «3»
верно выполненные 7 - 8 заданий – оценка «4»
верно выполненные 9 - 10 заданий – оценка «5»