Тема: Решение задач на сложение и умножение вероятностей

Перечень справочной литературы:

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. – М.:Образовательно-издательский центр «Академия», 2014
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике. – М: Издательский центр «Академия», 2014
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2016
4. Дадаян А.А. Математика: учеб.- М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2015

Задание:

1. Изучить теоретический материал, разобрать решенные примеры.

2. Выполнить самостоятельную работу и отправить ее на эл. почту anzhelika-sedova@mail.ru до 10.00.

Теоретический материал

Основные теоремы теории вероятностей

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равна сумме их вероятностей: P(A+B)=P(A)+P(B).

Следствие 1. Если А1, A_2, ..., A_n - попарно несовместные события, то вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:
$P(A_l + A_2 +... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) +... + P(A_n)$.

Следствие 2. Вероятность суммы попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих полную группу, равна 1:

$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$.

Следствие 3.СобытияA и $\overline{A}$ несовместны и образуют полную группу событий, поэтому

$$P(A+\overline{A}) = P(A)+P(\overline{A}) = 1.$$

Отсюда $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Теорема 2. Вероятность суммы двух совместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий безвероятности их произведения:

$$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Введем понятие зависимых и независимых событий.

Два события А и В называются *независимыми,* если появление одного из них не влияет на вероятность появления другого (в противном случае события *зависимы).*

Теорема 3. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B).$$

Следствие. Вероятность произведения n независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна произведению их вероятность:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

Условной вероятностью события В при условии, что событие А уже произошло, называется число P(AB)/P(A), которое обозначается

$$P(AB)/P(A) = P(B/A) = P_A(B).$$

Аналогично, $P(AB)/P(B) = P(A/B) = P_B(A)$ -условная вероятность события А при условии, что событие В уже произошло.

Теорема 4. Вероятность произведения 2-х зависимых событий А и В равна произведению вероятности наступления события А на условную вероятность события В при условии, что событие А уже произошло:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Следствие. Если события А и В независимы, то из теоремы 4 следует теорема 3.

Событие В не зависит от события А, если P(B/A)=P(B).

Теорему 4 можно обобщить на n событий.

Теорема 5. Вероятность произведения n зависимых событий A_1, A_2, ,…, A_n равна произведению последовательных условных вероятностей:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1} \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot ... \cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1}).$$

Теорема 6. Вероятность наступления хотя бы одного из событий A_1, A_2, ,…, A_n равна разности между единицей и вероятностью произведения отрицаний событий A_1, A_2, ,…, A_n:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}/\overline{A_1}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}/\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_{n-1}}).$$

Следствие 1. Вероятность наступления хотя бы одного из событий A_1, A_2, ,…, A_n, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий

$$P(A)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})...P(\overline{A_n}).$$

Следствие 2. Если события A_1, A_2, ,…, A_nнезависимы и имеют одинаковую вероятность появиться ($P(A_1) = P(A_2) = \ldots P(A_n) = p$, $P(A_i) = 1-p = q$), то вероятность появления хотя бы одного из них равна$P(A) = 1-q^n$.

Алгоритм: Составить формулу, выражающую событие, вероятность которого необходимо определить, через элементарные события, а затем применить теоремы 1 - 6.

Примеры решения задач

Пример 1. В урне 10 шаров, из которых два белые, а остальные черные. Наудачу взято 2 шара. Найдем вероятность того, что оба шара черные.

Решение. Пусть элементарные события: A_1- первый шар черный; A_2- второй шар черный. Тогда событие $A = A_1 \cdot A_2$- оба шара черные. Вероятность того, что второй шар черный, будет зависеть от того какого цвета первый шар. Если первый шар черный, то вероятность того, что второй шар также черного цвета, равна условной вероятности события A_2 при условии, что A_1 уже произошло: $P(A_2/A_1)=7/9$, так как после наступления события A_1- всего шаров останется 9, из них 7 черных. Отсюда

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) \overset{T4}{=} P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}.$$

Пример 2. Два стрелка сделали по 1-му выстрелу в мишень, вероятность попадания первого 0,8, а второго 0,6. Найти вероятность следующих событий: 1) событие А - оба попали; 2) событие В - попал один ; 3) событие С - попал хотя бы один.

Решение. Обозначим через A_1, A_2 события, обозначающие соответственно, что 1-й и 2-й стрелок попали в цель. По условию: $P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}6$.

1). Событие А - оба стрелка попали в цель, наступит при одновременном попадании, поэтому $A=A_1 \cdot A_2$. Отсюда, в силу независимости событий A_1, A_2, по теореме 3 имеем $P(A) = P(A_1)\ P(A_2)=0{,}48$.

2). Событие В - попал один стрелок. В = $\overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot \overline{A_2}$. Применим последовательно теоремы 1 и 3:

$$P(B) = (\overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot \overline{A_2}) \overset{T1}{=} P(\overline{A_1} \cdot A_2) + P(A_1 \cdot \overline{A_2}) \overset{T3}{=}$$
$$= P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) = (1-0{,}8) \cdot 0{,}6 + 0{,}8\,(1-0{,}6) =$$
$$= 0{,}12+0{,}32 = 0{,}44.$$

3). Событие С - хотя бы один стрелок попал, $C = A_1 + A_2$,

$$P(C)=P(A_1+A_2) \overset{T2}{=} P(A_1)+P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = 0{,}8+0{,}6 - 0{,}8 \cdot 0{,}6 =$$
$$= 0{,}92 \text{ или } P(\overline{C}) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = (1 - P(A_1)) \cdot$$
$$\cdot (1-P(A_2)) = (1-0{,}8) \cdot (1-0{,}6) = 0{,}08, \text{ отсюда (по следствию}$$
$$\text{3 из T1)}, P(C) = 1-0{,}08 = 0{,}92.$$

Пример 3. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Событие А - оба шара белые,

элементарное событие A_1 - 1 вытащили белый шар,

элементарное событие A_2 - 2 вытащили белый шар.

Событие А наступит, если наступят одновременно и A_1, и A_2, $A=A_1 \cdot A_2$, отсюда

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) \overset{T4}{=} P(A_1)\,P(A_2/A_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

Пример 4. Условия примера 3, но, после 1-го извлечения, шар возвращается в урну.

Решение. В этом случае события A_1и A_2 независимы.

$$A = A_1 \cdot A_2,\ \ P(A) = P(A_1 \cdot A_2) \overset{T3}{=} P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0{,}16.$$

Пример 5. Студент разыскивает нужную ему формулу в 3-х справочниках. Вероятность того, что формула содержится в 1, 2 и 3 справочнике соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8.Найти вероятность того, что формула содержится:

а) только в одном справочнике (событие А);

б) только в двух справочниках (событие В**);**

в) во всех трех справочниках (событие С);

г) хотя бы в одном справочнике (событие D);

д) ни в одном справочнике (событие Е).

Решение. Рассмотрим элементарные события и их вероятности:

A_1 – формула находится в 1 справочнике, $P(A_1)=0,6$,
$P(\overline{A_1}) = 1 - 0,6 = 0,4$;
A_2 – формула находится во 2 справочнике, $P(A_2)=0,7$,
$P(\overline{A_2}) = 1\text{-}0,7 = 0,3$;

A_3 – формула находится в 3 справочнике, $P(A_3)=0,8$,
$P(\overline{A_3}) = 1 - 0,8 = 0,2$.

Выразим через элементарные события и их отрицания события А - Е, применим теоремы 1 - 6:

а) $A=A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3} + \overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3} + \overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$,

$$P(A)= P(A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3) =$$
$$= P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3}) +$$
$$+ P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3) = 0,6\cdot 0,3\cdot 0,2 + 0,4\cdot 0,7\cdot 0,2 + 0,4\cdot 0,3\cdot 0,8 = 0,188;$$

б) $B = A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3} + A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3 + \overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3$,

далее аналогично пункту а) получим, что P(B)=0,452;

в) $C= A_1\cdot A_2\cdot A_3$,
$$P(C) = P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) =$$
$$= 0,6\ 0,7\cdot 0,8=0,336;$$

г) $D= A_1+A_2+A_3$, вероятность события D можно найти, обобщив теорему 2 для трёх событий:
$$P(D)= P(A_1+A_2+A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1\cdot A_2) -$$
$$- P(A_1\cdot A_3) - P(A_2\cdot A_3) + P(A_1\cdot A_2\cdot A_3).$$ Но проще воспользоваться следствием к теореме 6:
$$P(D) = 1 - P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3}) = 1 - 0,4\cdot 0,3\cdot 0,2 = 0,976;$$

е) $E= \overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$, $P(E) = 0,024$.

Самостоятельная работа

Вариант 1: Алексеев – Лукашевич;

Вариант 2: Машнина – Шипков.

Вариант 1. № 1, 2(а, б), 3(а, б),4, 5(а, б), 6
Вариант 2. № 2(в, г),3(в, г), 5(в, г), 7, 8
Задачи:

1. В группе 25 студентов, из них 10 юношей и 15 девушек. Какова вероятность того, что из вызванных наудачу трех студентов: а) все три девушки; б) первые две девушки, третий - юноша; в) все три юноши?

2. В магазин вошли три покупателя. Вероятность того, что каждый что-нибудь купит, равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) два из них совершат покупки;б)все три совершат покупки; в) ни один не совершит покупки; г) по крайней мере, два совершат покупки; д) хотя бы один купит товар.

3. Вероятность получить высокие дивиденды по акциям на первом предприятии - 0,2, на втором - 0,35, на третьем - 0,15. Определить вероятность

того, что акционер, имеющий акции всех предприятий, получит высокие дивиденды а) на всех предприятиях; б) только на одном предприятии; в) хотя бы на одном предприятии.

4. На базу поступило 40 ящиков овощей, из них 30 первого сорта. Наудачу для проверки берут два ящика. Какова вероятность, что: а) оба содержат овощи первого сорта; б) разного сорта; в) одного сорта?

5. Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично» равна для первого студента 0,7, для второго - 0,6, для третьего - 0,2. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично»: а) только одним из студентов; б) двумя студентами; в) хотя бы одним; г) ни одним?

6. Первый студент из 20 вопросов программы выучил 17, второй - 12. Каждому студенту задают по одному вопросу. Определить вероятность того, что: а) оба студента правильно ответят на вопрос; б) хотя бы один ответит верно; в) правильно ответит только первый студент.

7. Впервой бригаде 6 тракторов, во второй-9. В каждой бригаде один трактор требует ремонта. Из каждой бригады наудачу выбирают по одному трактору. Какова вероятность того, что а) оба трактора исправны; б) один требует ремонта; в) трактор из второй бригады исправен.

8. На предприятии имеется три автомобиля. Вероятность безотказной работы первого из них равна 0,9, вторoго - 0,7, третьего - 0,8. Найти вероятность того, что безотказно в течение определенного времени будут работать хотя бы два автомобиля.

Критерии оценки

верно выполненные 4 - 5 заданий – оценка «3»
верно выполненные 6 - 7 заданий – оценка «4»
верно выполненные 8 заданий – оценка «5»