

Тема: Вычисление характеристик дискретной случайной величины

Перечень справочной литературы:

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. – М.: Образовательно-издательский центр «Академия», 2014
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике. – М.: Издательский центр «Академия», 2014
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2016
4. Дадаян А.А. Математика: учеб.- М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2015

Задание:

1. Изучить теоретический материал, разобрать решенные примеры.
2. Выполнить самостоятельную работу и отправить ее на эл. почту anzhelika-sedova@mail.ru до 13.00.

Теоретический материал:

На практике нет необходимости характеризовать случайную величину полностью. Обычно достаточно указать только отдельные числовые параметры распределения ее значений. Такие числовые параметры принято называть числовыми характеристиками распределения. Прежде всего, это характеристики положения: математическое ожидание, медиана, мода; характеристики рассеяния: дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

Математическим ожиданием $M(X)$ ДСВ X называется среднее значение случайной величины:

$$M(x) = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{1} = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Или иначе, $M(X)$ - это сумма парных произведений случайной величины на соответствующую вероятность:

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Мода $M_0(X)$ распределения - это значение СВ, имеющее наиболее вероятное значение.

Медиана $M_0(X)$ - это значение случайной величины, которое делит таблицу распределения на две части таким образом, что вероятность попадания в одну из них равна 0,5. Медиана обычно не определяется для ДСВ.

Дисперсия служит для более полной оценки ДСВ, т.к. одного математического ожидания недостаточно.

Например, пусть заданы СВ X и Y :

x_i	-1	1
p_i	0,5	0,5

y_i	-100	100
p_i	0,5	0,5

$M(X) = -1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = 0$, $M(Y) = -100 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 = 0$ - хотя математические ожидания равны, однако, случайные величины X и Y явно различны, поэтому для характеристики случайной величины одного математического ожидания недостаточно и необходимо ввести другие характеристики, одна из них - дисперсия.

Дисперсия служит для характеристики рассеяния СВ относительно ее математического ожидания.

Дисперсией ДСВ X называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(x - M(X))^2 =$$

$$= (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + \dots + (x_n - M(X))^2 p_n$$

Часто для вычисления дисперсии используется еще одна формула:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2,$$

$$\text{где } M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n$$

Дисперсия характеризует средний квадрат отклонения ДСВ, поэтому на практике часто используют в качестве характеристики разброса *среднее квадратическое отклонение* $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, которое имеет ту же размерность, что и СВХ.

Примеры решения задач

Пример 1.

X_i	-1	0	1	2
P_i	0,1	0,2	0,1	0,6

$$M(X) = 0,1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,6 = 1,2; M_0(X) = 2.$$

Пример 2.

x_i	-1	1
p_i	0,5	0,5

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1 - 0^2 = 1, \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1, \text{ так как } M(X^2) = (-1)^2 \cdot 0,5 + (1)^2 \cdot 0,5 = 1;$$

y_i	-100	100
p_i	0,5	0,5

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 10000 - 0^2 = 10000, \sigma(Y) = \sqrt{10000} = 100, \text{ так как } M(Y^2) = (-100)^2 \cdot 0,5 + (100)^2 \cdot 0,5 = 10000.$$

Самостоятельная работа

Решите следующие задачи:

1. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = 1$ с вероятностью $p_1 = 0,2$; $x_3 = 5$ с вероятностью $0,3$ и x_2 с вероятностью p_2 . Найти x_2 и p_2 , если известно, что $M(X) = 3$.
2. Вероятность сдать экзамен студентом на «отлично» равна $0,3$, на «хорошо» - $0,4$. Определить вероятности получения других оценок (2; 3), если известно, что $M(X) = 3,9$.
3. Вероятность выигрыша по лотерейному билету составляет $0,02$. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$ числа выигранных билетов, если их было приобретено 100 .
4. По одному тиражу лотереи куплено 100 билетов. Среднее квадратическое отклонение числа выигранных билетов равно трем. Найти вероятность выигрыша по одному билету лотереи.
5. Совокупность семей имеет следующее распределение по числу детей:

x_i	x_1	x_2	2	3
p_i	0,1	p_2	0,4	0,35

Определить x_1 , x_2 , p_2 , если известно, что $M(X) = 2$, $D(X) = 0,9$.

6. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	1	x_2	x_3	8
p_i	0,1	p_2	0,5	0,1

Найти x_2 , x_3 , p_2 , если известно, что $M(X) = 4$, $M(X^2) = 20,2$.

7. Совокупность студентов имеет следующее распределение по результатам сдачи сессии:

x_i	2	3	4	5
p_i	0,1	p_2	p_3	p_4

Найти вероятности получения удовлетворительных, хороших и отличных оценок, если известно, что математическое ожидание (среднее значение) результатов сдачи экзаменов составило $3,7$, а среднее квадратическое отклонение $0,9$.

Критерии оценки

верно выполненные 4 - 5 заданий – оценка «3»

верно выполненные 6 заданий – оценка «4»

верно выполненные 7 заданий – оценка «5»