Тема: Вычисление характеристик непрерывной случайной величины

Перечень справочной литературы:

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. – М.: Образовательно-издательский центр «Академия», 2014
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике. – М: Издательский центр «Академия», 2014
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2016
4. Дадаян А.А. Математика: учеб.- М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2015

Задание:

1. Изучить теоретический материал, разобрать решенные примеры.

2. Выполнить самостоятельную работу и отправить ее на эл. почту anzhelika-sedova@mail.ru до 11.00.

Теоретический материал:

СВХ непрерывна, если ее интегральная функция непрерывна на всей числовой оси. СВХ непрерывна и имеет дифференциальную функцию, если ее интегральная функция непрерывна и дифференцируема всюду, за исключением конечного числа точек на любом конечном промежутке.

Дифференциальной функцией (функцией плотности вероятности) СВХ называется производная ее функции распределения:

$$f(x)=F'(x). \qquad (*)$$

Свойства дифференциальной функции:

1) $f(x) \geq 0;$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$

3) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt;$

4) $P(a \leq X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин

1)Математическое ож*идание НСВ X определяется по формуле*

$$M(X)= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Если НСВ Хопределена на интервале (a;), то

$$M(X)= \int\limits_{a}^{b} xf(x)dx.$$

2) Дисперсия НСВ:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-(M(X))^2.$$

Пример. Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \dfrac{3x^2}{125} & \text{при} \quad 0<x\le 5,\\ 0 & \text{при} \quad x>5.\end{cases}$$

Определить: а) вероятность попадания случайной величины в интервал (2;3); б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X; в) дифференциальную функции распределения изобразить графически.

Решение.

а) Вероятность попадания случайной величины в интервал (2, 3) можно найти, зная свойство 4 функции плотности вероятности:

$$P(2<X<3)=\int_2^3\frac{3x^2}{125}dx=\frac{3}{125}\frac{x^3}{3}\Big|_2^3=\frac{27}{125}-\frac{8}{125}=\frac{19}{125}=0{,}152.$$

б) Найдем числовые характеристики непрерывной случайной величины X. Следует обратить внимание, что случайная величина задана на интервале (0;5).

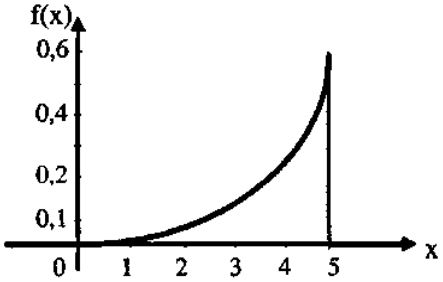
$$M(X)=\int_0^5 x\cdot\frac{3}{125}x^2dx=\frac{3}{125}\int_0^5 x^3dx=$$

$$=\frac{3}{125}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^5=\frac{3}{5^3}\cdot\frac{5^4}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}=3{,}75.$$

$$D(X)=\int_0^5 x^2\cdot\frac{3x^2}{125}dx-3{,}75^2=\frac{3}{125}\int_0^5 x^4dx-14{,}0625=$$

$$=\frac{3}{125}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^5-14{,}0625=15-14{,}0625=0{,}9375.$$

в) Построим график функции f(x):



Самостоятельная работа

Вариант 1 - № 1, 3, 5;
вариант 2 - № 2, 4, 6.

Вариант 1: Алексеев – Лукашевич;
Вариант 2: Машнина – Шипков.

Задание: Случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения f(X). Требуется:

а) найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X;
б) найти вероятность того, что случайная величина X окажется в пределах интервала (a; b);
в) построить графики функций f(x).

1	$f(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ \ x<1,\\ \frac{1}{2} \ \textit{при} \ \ 1\le x\le 3,\\ 0 \ \textit{при} \ \ x>3.\end{cases}$ a = 0; b = 2.	2	$f(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ \ x<0,\\ \frac{1}{4} \ \textit{при} \ \ 0\le x\le 4,\\ 0 \ \textit{при} \ \ x>4.\end{cases}$ a = 1; b = 3.
3	$f(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ \ x<0,\\ \sin 2x \ \textit{при} \ \ 0\le x\le \frac{\pi}{2},\\ 0 \ \textit{при} \ \ x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ a = $\frac{\pi}{12}$; b = $\frac{\pi}{4}$.	4	$f(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ \ x<-\frac{\pi}{4},\\ \cos 2x \ \textit{при} \ -\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{4},\\ 0 \ \textit{при} \ \ x>\frac{\pi}{4}.\end{cases}$ a = $-\frac{\pi}{6}$; b = $\frac{\pi}{4}$.
5	$f(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ \ x<4,\\ \frac{1}{2} \ \textit{при} \ \ 4\le x\le 6,\\ 1 \ \textit{при} \ \ x>6.\end{cases}$ a = 4; b = 7.	6	$f(x)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ \ x<0,\\ 2\cdot x \ \textit{при} \ \ 0\le x\le 1,\\ 1 \ \textit{при} \ \ x>1.\end{cases}$ a = $\frac{1}{4}$; b = $\frac{1}{2}$.