МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ САМАРСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ САМАРСКОЙ ОБЛАСТИ «НОВОКУЙБЫШЕВСКИЙ НЕФТЕХИМИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ»

УТВЕРЖДЕНО

ПРИКАЗ ДИРЕКТОРА
ГАПОУ СО «ННХТ»
ОТ 14.11.2023Г.№ 127-У

КОМПЛЕКТ КОНТРОЛЬНО- ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по оценке освоения итоговых образовательных результатов, учебной дисциплины

ЕН.02 **Экологические основы природопользования.**

38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям).

г. Новокуйбышевск, 2023 г.

РАССМОТРЕНО НА ЗАСЕДАНИИ СОГЛАСОВАНО

Предметно-цикловой комиссии
Общеобразовательных дисциплин
Председатель Н. П. Комиссарова
Приказ №2 от 17.10.2023г

Старший методист ННХТ

О.Д. Щелкова
17.10.2023г.

ОДОБРЕНО
Методистом Л.А.Шипилова
17.10.2023г.

Составитель: Седова А.Н. преподаватель ГАПОУ СО «ННХТ»

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПАСПОРТ КОНТРОЛЬ-ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
2. КОМПЛЕКТ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ.

1. Паспорт контрольно-измерительных средств.

1.1. Область применения контрольно-измерительных материалов

Контрольно-измерительные средства (КИМ) предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины «Математика».

КОС включают контрольные материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации в форме экзамена.

КИМ разработаны на основании положений:

- Федерального государственного образовательного стандарта по специальности среднего профессионального образования (далее – СПО) 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям).
- программы учебной дисциплины «Математика».

1.2. Результаты освоения дисциплины, подлежащие проверке

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	
Код и наименование умений	**Код и наименование знаний**
У 1. Применять математические методы для решения профессиональных задач; **У 2.** Использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях	**З 1.** Основные понятия и методы математического синтеза и анализа; **З 2.** Основные понятия и методы дискретной математики; **З 3.** Основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики

2. Распределение типов контрольных заданий по элементам знаний и умений при текущем контроле

Условное обозначение типов контрольных заданий:
К - контрольная работа;
П - практическое занятие;
ВСР – внеаудиторная самостоятельная работа

Содержание учебного материала по программе УД	Код элемента знаний, умений/ Форма текущего контроля				
	У 1	**У 2**	**З 1**	**З 2**	**З 3**
Раздел 1. Введение в анализ					
Тема 1.1 Дифференциальное и интегральное исчисление	П, К, ВСР	П, К, ВСР	П, К, ВСР		
Тема 1.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения	П, К, ВСР	П, К, ВСР	П, К, ВСР		
Раздел 2. Дискретная математика					
Тема 2.1 Основы дискретной математики	П, К, ВСР	П, К, ВСР		П, К, ВСР	
Раздел 3. Теория вероятностей и математической статистики					
Тема 3.1 Теория вероятностей	П, К, ВСР	П, К, ВСР			П, К, ВСР
Тема 3.2 Математическая статистика	П, К, ВСР	П, К, ВСР			П, ВСР

3. Система оценки образовательных достижений обучающихся

Оценка индивидуальных образовательных достижений, обучающихся предполагается в форме текущего контроля умений и знаний и промежуточной аттестации. Ежемесячно преподавателем осуществляется оценка аудиторной и внеаудиторной деятельности обучающихся в форме контрольной точки. Результаты текущего контроля складываются из результатов:

- работы студентов на занятиях, в т.ч. практических;
- выполнения внеаудиторной самостоятельной работы;
- контрольных работ;
- зачетов.

Для получения допуска к промежуточной аттестации обязательно выполнение всех контрольных, практических работ, сдачи зачетов и полного перечня всех форм внеаудиторной самостоятельной работы. При оценке всех видов работ, обучающихся используется следующая шкала оценки образовательных достижений:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	балл (оценка)	вербальный аналог
90-100	5	отлично
80-89	4	хорошо
70-79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Промежуточная аттестация в форме экзамена предполагает письменный ответ на один теоретический вопрос, проверяющий усвоение материала по разделам программы учебной дисциплины, и выполнение практического задания.

4. Структура контрольных заданий для текущего контроля

4.1. Текущий контроль по теме 1.1 «Дифференциальное и интегральное исчисление»
1. Практические занятия:
№ 1. Вычисление пределов – 2 ч.;
№ 2. Вычисление производных простых функций – 2 ч.;
№ 3. Вычисление производных сложных функций - 2 ч.;
№ 4. Вычисление производных неявных функций, функций, заданных параметрически – 2 ч.;
№ 5. Исследование функции на возрастание (убывание), экстремумы – 2 ч.;
№ 6. Определение направления выпуклости графика функции, нахождение точек перегиба – 2 ч.;
№ 7. Нахождение асимптот кривой – 2 ч.;
№ 8. Исследование функции и построение графиков – 2 ч.;
№ 9. Вычисление неопределенного интеграла непосредственным методом – 2 ч.;
№ 10. Вычисление неопределенного интеграла методом подстановки – 2 ч.;
№ 11. Вычисление неопределенного интеграла методом интегрирования по частям - 2 ч.;
№ 12. Вычисление определенного интеграла – 2 ч.;
№ 13. Вычисление площадей плоских фигур – 2 ч.
Перечень объектов контроля и оценки: З 1, З 4.
2. Контрольная работа № 1 – практическое занятие № 14 – 2 ч.
Перечень объектов контроля и оценки: З 1, З 4.
3. Внеаудиторная самостоятельная работа студентов:
№ 1. Вычисление производных по правилу Лопиталя - 2 ч.;
№ 2. Решение задач на исследование функций и построение их графиков - 6 ч.;
№ 3. Вычисление частных производных функции нескольких переменных – 4 ч.;
№ 4. Нахождение экстремума функции нескольких переменных – 2 ч.;
№ 5. Вычисление объемов тел вращения с помощью интеграла – 6 ч.
Перечень объектов контроля и оценки: З 1, З 4.

4.2. Текущий контроль по теме 1.2. «Дифференциальные уравнения»
1. Практические занятия:
№ 15. Решение дифференциальных уравнений с разделенными переменными – 2 ч.;
№ 16. Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными – 2 ч.;
№ 17. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка – 2 ч.;
№ 18. Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка – 2 ч.
Перечень объектов контроля и оценки: У 1, З 1.
2. Контрольная работа № 2 – практическое занятие № 19 – 2 ч.
Перечень объектов контроля и оценки: У 1, З 1.
3.Внеаудиторная самостоятельная работа студентов:
№ 6. Решение задач, приводящих к дифференциальным уравнениям – 4 ч.;
Перечень объектов контроля и оценки: У 1, З 1.

4.3. Текущий контроль по теме 2.1 «Основы дискретной математики»
1. Практические занятия:
№ 20. Выполнение операций над множествами – 2 ч.;
№ 21. Выполнение операций над высказываниями – 2 ч.;
Перечень объектов контроля и оценки: З 2.
2. Контрольная работа № 3 – практическое занятие № 22 – 2 ч.

Перечень объектов контроля и оценки: З 2.
3. Внеаудиторная самостоятельная работа студентов:
№ 7. Выполнение операций над сложными высказываниями - 4 ч.
Перечень объектов контроля и оценки: З 2.

4.4. Текущий контроль по теме 3.1. «Теория вероятностей»
1. Практические занятия:
№ 23. Решение задач на непосредственный подсчет вероятностей -2 ч.;
№ 24. Вычисление вероятностей событий – 2 ч.;
№ 25. Выполнение операций над событиями – 2 ч.;
№ 26. Решение задач на сложение вероятностей – 2 ч.;
№ 27. Решение задач на умножение вероятностей – 2 ч.;
№ 28. Решение задач на нахождение условной вероятности – 2 ч.;
№ 29. Решение задач на применение формулы полной вероятности – 2 ч.
Перечень объектов контроля и оценки: З 3, З 4.
2. Контрольная работа № 4 - практическое занятие № 30 – 2 ч.
Перечень объектов контроля и оценки: З 3, З 4.
3.Внеаудиторная самостоятельная работа студентов:
№ 8. Решение задач на применение формулы Байеса – 3 ч.;
№ 9. Решение задач на применение формулы Бернулли – 2 ч.
Перечень объектов контроля и оценки: З 3, З 4.

4.5. Текущий контроль по теме 3.2. «Математическая статистика»
1. Практические занятия:
№ 31, 32. Вычисление характеристик случайной величины – 4 ч.;
№ 33. Построение графических изображений статистических данных – 2 ч.;
№ 34, 35. Расчет абсолютных и относительных показателей – 4 ч.;
№ 36. Нахождение средних статистических показателей – 2 ч.;
№ 37. Расчет показателей вариации – 2 ч.;
№ 38. Расчет показателей, характеризующих динамику процесса – 2 ч.
Перечень объектов контроля и оценки: З 3, З 4.
2. Внеаудиторная самостоятельная работа студентов:
№ 10. Составление уравнения прямой линии регрессии – 4 ч.;
№ 11. Составление сводки и группировки статистических данных – 2 ч.
Перечень объектов контроля и оценки: З 3, З 4.

Примечание. Задания для внеаудиторных самостоятельных работ см. в методических рекомендациях для выполнения самостоятельных работ по дисциплине «Математика» для специальности 190631 «Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта» 2 курс.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ; ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

по теме: «Вычисление пределов функции»

Цель: сформировать умение находить пределы последовательностей и пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов

Определение. *Число в называется пределом функции f(x), при x стремящемся к a, если при любом ε > 0 существует такая окрестность точки a, что для любого x ≠ a из этой окрестности |f(x) – b| < ε. Предел обозначается так:* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Теорема 1. *Если при x* $\to$ *a существуют пределы функций f(x) и g(x), то существует также и предел их суммы, равный сумме пределов функций f(x) и g(x):*

$$¿\lim\limits_{x\to a} ¿\,(f(x)+g(x)) ¿ = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x).$$

Теорема 2. Если *при x* $\to$ *a существуют пределы функций f(x) и g(x), то существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций f(x) и* g(x):

$$¿\lim\limits_{x\to a} ¿\,(f(x)\cdot g(x)) ¿ = \lim\limits_{x\to a} f(x)\ .\ \lim\limits_{x\to a} g(x).$$

Следствие. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim\limits_{x\to a} (k\cdot f(x)) = \mathrm{k}\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x).$$

Теорема 3. *Если при x* $\to$ *a существуют пределы функций f(x) и g(x), то существует также и предел их отношения, равный отношению пределов функций f(x) и g(x):*

$$\lim\limits_{x\to a} (f(x)/g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \,/\, \lim\limits_{x\to a} g(x).$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 5} (2x^2+8x)$.

Решение. По теореме 1 о пределе суммы функций и следствию из теоремы 2 имеем:
$\lim\limits_{x\to 5} (2x^2+8x) = \lim\limits_{x\to 5} 2x^2 + \lim\limits_{x\to 5} 8x = 2\lim\limits_{x\to 5} x^2 + 8\lim\limits_{x\to 5} x =$ $= 2 \cdot 25 + 8 \cdot 5 =$ 90.

-

<u>Фронтальная практическая работа</u>

Упражнения.

Вычислить пределы функций:

1.1 $\lim\limits_{x\to 1}$ ¿¿ $+ 3x^2$ - x + 5);

1.2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5-3^{x+2}}{3+2^{x+3}}$;

1.3 $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x+5}$;

1.4 $\lim\limits_{x\to -1} (x^3-x^2-10x-3)$;

(Ответы: 11; $-\frac{1}{3}$; 0,1; 5.)

При решении примеров на отыскание пределов при x $\to \infty$ следует использовать следующую таблицу простейших пределов, в которых C и $a > 0$ постоянные:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{C}{x} = \infty$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{C}{x} = 0$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{C} = \infty$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} Cx = \infty$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$, если а < 1

6. $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$, если а > 1

7. $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$, если а < 1

8. $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, если а > 1

Пример 2. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{x^2-4x+5}$.

Решение. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{x^2-4x+5} = \lim_{x \to \infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}} = \frac{1-0}{1-0+0} = 1.$$

Упражнения.

Найдите предел функции:

1.5 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x+1}$.

1.6 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{ж^2+x}$.

1.7 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1-x^3}{3x^3}$.

(Ответы: 1; 1; $-\frac{1}{3}$)

Индивидуальная практическая работа

Задание 1. Докажите равенство:

Блок А

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{5x} = 0$;

б) $\lim\limits_{x \to -2} (x¿¿2-3x+4)¿ = 14$.

Блок Б

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x+1}{3x-1} = \frac{4}{3}$;

б) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$.

Задание 2. Найдите предел функции.

Блок А

а) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+4}{x+2}$;

Блок Б

а) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$;

б) $\lim\limits_{x \to 4}\left(2(x+3)-\dfrac{x}{x-2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x \to 1}\left(x^5-5x+2+\dfrac{1}{x}\right)$.

б) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$;

в) $\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{x+1}{x^3+1}$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ № 2, № 3, № 4

по темам: «Вычисление производных простых функций», «Вычисление производных сложных функций», «Вычисление производных неявных функций, функций, заданных параметрически».

Цель: сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций, знать геометрический смысл производной

Теоретические сведения к практической работе

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Обозначения производной в точке x_0:

$$f'(x_0),\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0},\quad \frac{df(x_0)}{dx},\quad \left.y'_x\right|_{x_0},\quad y'(x_0)$$

и другие.

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*.

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	**VI**	Производная сложной функции $y = f[u(x)],\ y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	**VII**	Функция задана параметричес-кими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}.$
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u',\quad c = \text{const}$		
IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},\ (v(x) \neq 0)$	**VIII**	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции,

V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c\cdot v'}{v^2}$, $c = \text{const}$ $(v(x) \neq 0)$		то $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$, $(y'_x \neq 0)$.

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ п/п	*c*=const, *x* — независимая переменная, *u* = *u*(*x*) — дифференцируемая функция		
1	*C*'= 0	**9**	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2	*x*'= 1	**10**	$(\text{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	**11**	$(\text{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	**12**	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	**13**	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$
6	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ $(u > 0)$	**14**	$(\text{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(u > 0)$	**15**	$(\text{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$		

Производной n-го порядка называется производная от производной (*n*–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\dfrac{d^3 y}{dx^3}$ и т. д.

Пример 1. Найти производные функций:

а) $y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$; *б*) $s = (e^t - 2\ln t)\sin t$; *в*) $u = \text{ctg}^3 \dfrac{v}{3}$; *г*) $z = \dfrac{\text{arctg} 2t}{1+4t^2}$.

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$

$$= 3\cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть *t*, т. е. *t*=1, получим:′

$$s=[(e^t-2\ln t)\sin t]'=(e^t-2\ln t)'\sin t+(e^t-2\ln t)(\sin t)'=$$

$$((e^t)'-2(\ln t)')\sin t+(e^t-2\ln t)\cos t=\left(e^t-\frac{2}{t}\right)\sin t+(e^t-2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть *v*, т. е. *v*=1;′ используя формулу (3), получим:

$$u'=\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right]=2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)'=2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right)=$$

$$=2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right)=-\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}}=-\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что *t*=1, получим:′

$$z'=\left(\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}\right)'=\frac{(\operatorname{arctg}2t)'(1+4t^2)-(\operatorname{arctg}2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2}=$$

$$=\frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2)-\operatorname{arctg}2t(0+4\cdot 2t)}{(1+4t^2)^2}=\frac{2-8t\operatorname{arctg}2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Пример 2. Найти производную y'_x, если функция задана параметрически:

$$\begin{cases}x=\ln(5-2t)\\ y=\operatorname{arctg}(5-2t).\end{cases}$$

Решение.

Используем правило VII $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}.$

$$\begin{cases}x'_t=\dfrac{(5-2t)'}{5-2t}=\dfrac{-2}{5-2t}\\ y'_t=\dfrac{(5-2t)'}{1+(5-2t)^2}=\dfrac{-2}{1+(5-2t)^2}.\end{cases}$$

$$y'_x=\frac{-2}{1+(5-2t)^2}:\frac{-2}{5-2t}=\frac{5-2t}{1+(5-2t)^2}=\frac{5-2t}{4t^2-20t+26}.$$

Пример 3. Найти производную второго порядка функции $y=x^2\ln x.$

Решение.

$y'' = (y')'$, поэтому найдём производную первого порядка, а затем второго:

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

$$y'' = (x(2\ln x + 1))' = x'(2\ln x + 1) + x(2\ln x + 1)' = 2\ln x + 1 + x\frac{2}{x} = 2\ln x + 3.$$

<u>Фронтальная практическая работа</u>

1. Найдите производные функций

а) $y = x^2 - 4x + 3$;

б) $y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3\sqrt{x}}$;

в) $y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$;

г) $y = \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x}$.

2. Найти производную второго порядка от функции $y = x$ $\sin x$.

3. Найти производную y'_x функции $y=y(x)$, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos t \end{cases}$

<u>Индивидуальная практическая работа</u>

Задание 1. Найти производную первого порядка:

Блок А	*Блок Б*
а) $y = e^x + e^{-x}$	а) $y = 4\,e^{5x-1}$
б) $y = \sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x^2} + x$	б) $y = \frac{1}{4}\sin^4 2x$
в) $y = x^3 \cdot 3^x$	в) $y = 3^x + x^2 \operatorname{tg} x$

Задание 2. Найти производную второго порядка от функции

Блок А	*Блок Б*
$y = 3x^3 - \frac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}$	$y = \ln^3 \frac{x}{2}$

Задание 3. Найти производную y'_x функции $y=y(x)$, заданной параметрически:

Блок А	*Блок Б*
а) $\begin{cases} x = \cos(2t+6) \\ y = \sin(2t+6) \end{cases}$	а) $\begin{cases} x = (1-t)^2 \\ y = \cos(t-1) \end{cases}$
б) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = t^2 - 8 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = (1-4t)^2 \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ № 5, 6, 7

Тема: Исследование функции на возрастание, убывание, экстремумы. Определение направления выпуклостиграфика функции, нахождение точек перегиба. Нахождение асимптот кривой

Цель: напомнить учащимся, что такое экстремум, точки перегиба, схемы исследования функции на возрастание (убывание), определение направлений выпуклости (вогнутости) графика; ознакомить с понятием асимптоты кривой.

Теоретический материал

Достаточные признаки монотонности функции.

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала (a, b), то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала (a, b), то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

Теорема Дарбу. *Точки, в которых производная функции равна 0 или не существует, делят область определения функции на интервалы, внутри которых производная сохраняет знак.*

Используя эти интервалы, можно найти *интервалы монотонности* функций, что очень важно при их исследовании.

Пример. Найти интервалы монотонности функции $f(x) = 2x + x^{-2}$.

Решение. Область определения функции: $x \neq 0$; это можно записать как объединение интервалов: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$;

$$f'(x) = 2 - x^{-3}, \text{ отсюда } f'(x) = 0 \text{ при } x = 1.$$

Точки $x = 0$ и $x = 1$ делят область определения функции на три интервала: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$. По теореме Дарбу $f'(x)$ сохраняет знак внутри каждого из этих интервалов (рис.4a).

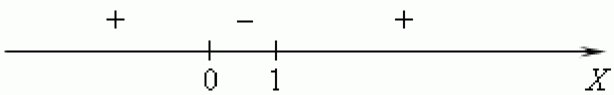


Рис. 4a.

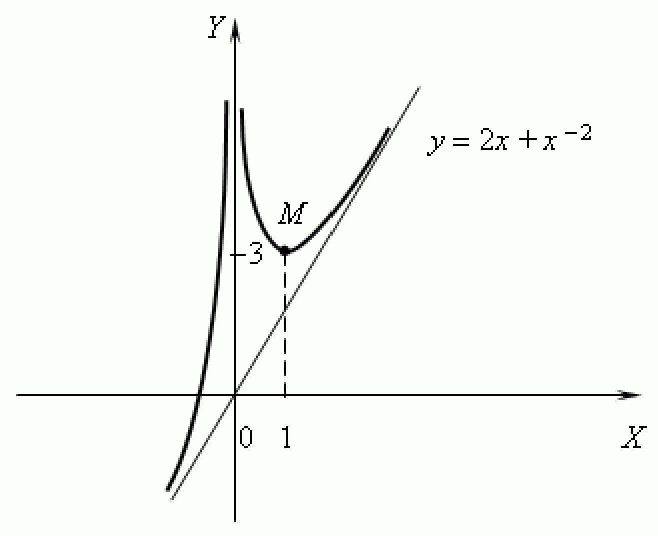


Рис. 4б.

Следовательно, функция возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ и убывает на интервале (0, 1).

Точка $x = 0$ не входит в область определения функции, но по мере приближения x к 0 слагаемое x^{-2} неограниченно возрастает, поэтому функция также неограниченно возрастает. В точке $x = 1$ значение функции равно 3. В соответствии с этим анализом мы можем построить график функции (рис.4*б*) .

Критические точки. Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* этой функции. Эти точки очень важны при анализе функции и построении её графика, потому что только в этих точках функция может иметь *экстремум* (*минимум* или *максимум* , рис.5*а*,*б*).

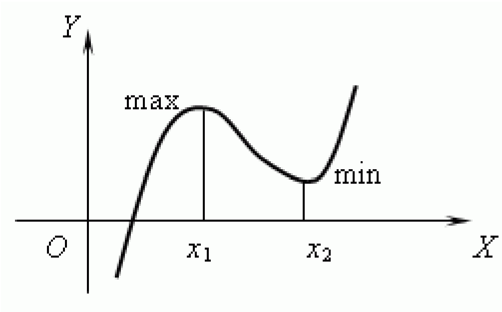


Рис. 5*а*

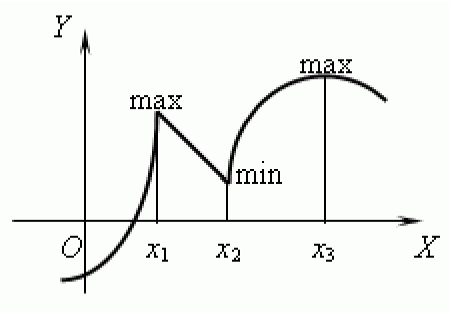


Рис. 5*б*

В точках x_1, x_2 (рис.5*a*) и x_3 (рис.5*b*) производная равна 0; в точках x_1, x_2 (рис.5*б*) производная не существует. Но все они точки экстремума.

Необходимое условие экстремума. *Если* x_0 *- точка экстремума функции* $f (x)$ *и производная* f' *существует в этой точке, то* $f' (x_0) = 0$.

Эта теорема - *необходимое* условие экстремума. Если производная функции в некоторой точке равна 0, то это не значит, что функция имеет экстремум в этой точке. Например, производная функции $f (x) = x^3$ равна 0 при $x = 0$, но эта функция не имеет экстремум в этой точке (рис.6).

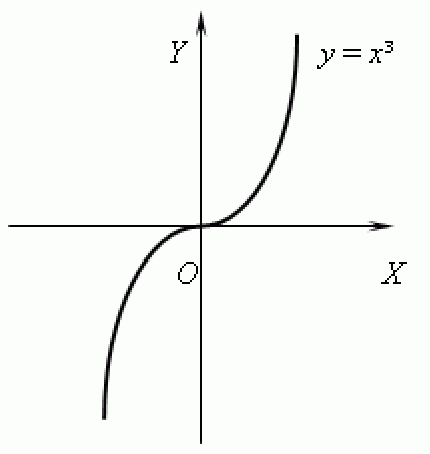


Рис. 6

Достаточные условия экстремума.

Если производная при переходе через точку x_0 меняет свой знак с плюса на минус, то x_0 - точка максимума.

Если производная при переходе через точку x_0 меняет свой знак с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума.

Правило исследования функции y=f(x) на экстремум

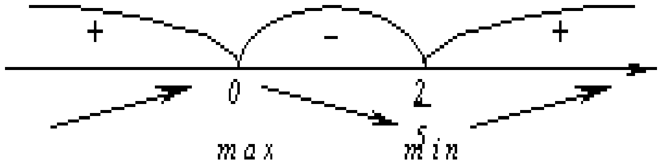
1. Найти область определения функции *f(x)*.
2. Найти первую производную функции *f '(x)*.
3. Определить критические точки, для этого:
   a. найти действительные корни уравнения *f '(x)*=0;
   b. найти все значения *x* при которых производная *f '(x)* не существует.
4. Определить знак производной слева и справа от критической точки. Так как знак производной остается постоянным между двумя критическими точками, то достаточно определить знак производной в какой-либо одной точке слева и в одной точке справа от критической точки.
5. Вычислить значение функции в точках экстремума.

Примеры. Исследовать функции на минимум и максимум.

1. $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$. Область определения функции *D(y)=R*.

Найдем производную заданной функции $y' = x^{2/3} + (x-1)\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$.

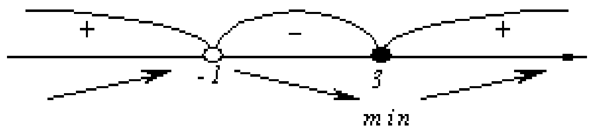
Определим критические точки $\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0, \quad x_1 = \dfrac{2}{5}$. Производная не существует при $x_2 = 0$. Следовательно, критические точки: 0 и 2/5. Нанесем их на числовую ось и определим знак производной на каждом из полученных промежутков.



$$f(-1) > 0,$$
$$f(\frac{1}{5}) < 0,$$
$$f(1) > 0.$$
Итак, $y_{\max} = f(0) = 0,$
$$y_{\min} = f(\frac{2}{5}) = (\frac{2}{5} - 1)\sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$

2.

$$y = \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2. \quad D(y) = (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty).$$

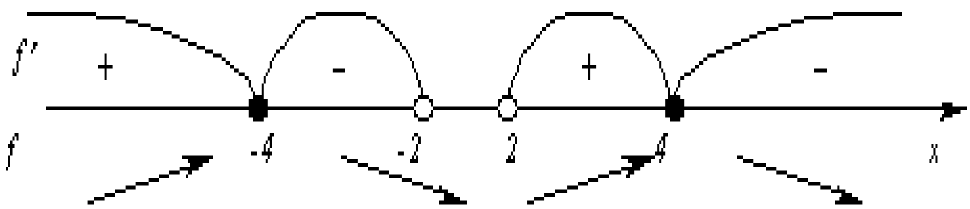


$$y' = 2\frac{x-3}{x+1} \cdot \frac{x+1-x+3}{(x+1)^2} = 8\frac{x-3}{(x+1)^3}.$$

Критическая точка функции $x = 3$. Точка $x = -1$ не входит в область определения функции.

$$y_{\min} = f(3) = 0.$$
$$y = -\frac{8+x^2}{\sqrt{x^2-4}}. \quad D(y) = (-\infty;-2) \cup (2;+\infty).$$
$$y' = -\frac{2x\sqrt{x^2-4} - \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}(8+x^2)}{x^2-4} = -\frac{2x(x^2-4) - x(8+x^2)}{(x^2-4)^{3/2}} = -\frac{x^3-16x}{(x^2-4)^{3/2}}.$$
$$y_{\max} = f(-4) = f(4) = -\frac{24}{\sqrt{12}} = -2\sqrt{12} = -4\sqrt{3}.$$

2.



Выпуклость функции, точки перегиба

График функции $y = f(x)$, дифференцируемой на интервале $(a; b)$, является на этом интервале **выпуклым**, если график этой функции в пределах интервала $(a; b)$ лежит не выше любой своей касательной (рис. 1).

График функции $y = f(x)$, дифференцируемой на интервале $(a; b)$, является на этом интервале **вогнутым**, если график этой функции в пределах интервала $(a; b)$ лежит не ниже любой своей касательной (рис. 2).

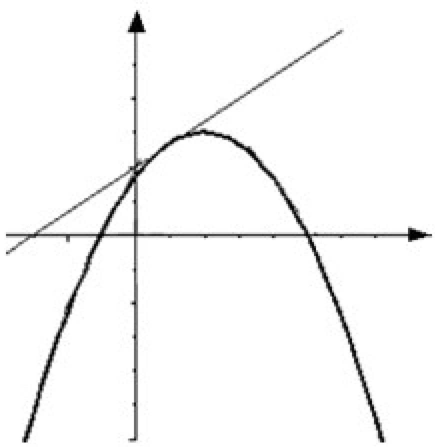


рис 1

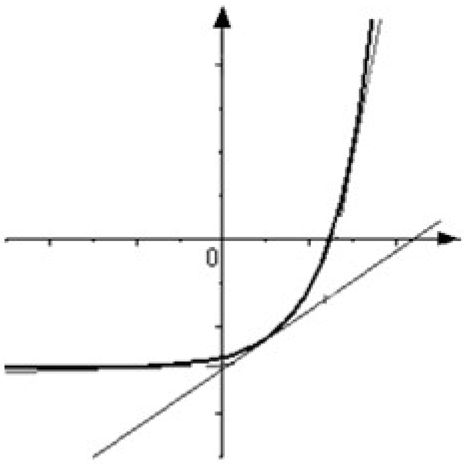


рис 2

Теоремы о выпуклости функции и точках перегиба
Теорема
(Об условиях выпуклости или вогнутости графика функции)
Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$ и имеет непрерывную, не равную нулю в точке $x_0 \in (a; b)$ вторую производную. Тогда, если $f''(x) > 0$ всюду на интервале $(a; b)$, то функция имеет вогнутость на этом интервале, если $f''(x) < 0$, то функция имеет выпуклость.
Определение
Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется точка $M(x_1; f(x_1))$, разделяющая промежутки выпуклости и вогнутости.
Теорема
(О необходимом условии существования точки перегиба)
Если функция $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_1; f(x_1))$, то $f''(x_1) = 0$ или не существует.
Теорема
(О достаточном условии существования точки перегиба)
Если:
первая производная $f'(x)$ непрерывна в окрестности точки x_1;
вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует в точке x_1;
$f''(x)$ при переходе через точку x_1 меняет свой знак,
тогда в точке $M(x_1; f(x_1))$ функция $y = f(x)$ имеет перегиб.
Схема исследования функции на выпуклость, вогнутость:
1. Найти вторую производную функции.
2. Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
3. Исследовать знак производной слева и справа от каждой найденной точки и сделать вывод об интервалах выпуклости и точках перегиба.

Пример

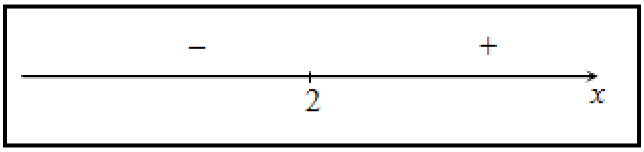
Задание. Найти интервалы выпуклости/вогнутости функции $y = \frac{x^3}{6} - x^2 + 3x + 1$
Решение. Найдем вторую производную заданной функции:

$$y'' = \left(\frac{x^3}{6} - x^2 + 3x + 1\right)'' = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 3\right)' = x - 2$$

Находим точки, в которых вторая производная равна нулю, для этого решаем уравнение $y''(x) = 0$:

$$y''(x) = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Исследуем знак второй производной слева и справа от полученной точки:



Так как на промежутке $(-\infty; 2)$ вторая производная $y''(x) < 0$, то на этом промежутке функция $y(x)$выпукла; в силу того, что на промежутке $(2; +\infty)$ вторая производная $y''(x) > 0$ - функция вогнута. Так как при переходе через точку $x = 2$ вторая производная сменила знак, то эта точка является точкой перегиба графика функции.

Ответ. Точка $x = 2$ - точка перегиба графика функции.

На промежутке $(-\infty; 2)$ функция выпукла, на промежутке $(2; +\infty)$ функция вогнута.

Асимптоты графика функции

Виды асимптот

Определение

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание. Прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = x_0$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Определение

Прямая $y = y_0$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ равно y_0 .

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Определение

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx - b] = 0$

Нахождение наклонной асимптоты.

Теорема (об условиях существования наклонной асимптоты):

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx] = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

Замечание. Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной при $k = 0$.

Замечание. Если при нахождении горизонтальной асимптоты получается, что $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, то функция может иметь наклонную асимптоту.

Замечание. Кривая $y = f(x)$ может пересекать свою асимптоту, причем неоднократно.

Пример.

Задание. Найти асимптоты графика функции $y(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

Решение. Область определения функции:

$D[f] : x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

а) вертикальные асимптоты: прямая $x = -1$ - вертикальная асимптота, так как

$$\lim_{x\to -1} y(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-3x+2}{x+1}\left[\frac{6}{0}\right] = \infty$$

б) горизонтальные асимптоты: находим предел функции на бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x+1} = \infty$$

то есть, горизонтальных асимптот нет.

в) наклонные асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [y(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2-3x+2}{x+1} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+2}{x+1} = -4$$

Таким образом, наклонная асимптота: $y = x - 4$.

Ответ. Вертикальная асимптота - прямая $x = -1$.

Наклонная асимптота - прямая $y = x - 4$.

Индивидуальная практическая работа

1. Найти экстремумы графика функции:

Вариант 1	**Вариант 2**
а) $y = x^2-2x+8$	б) $y = (-2/3)x^3+x+(2/3)$
в) $y = -x^2-3x+2$	г) $y = x^4-2x^2-3$
д) $y = 3x^2-x^3$	е) $y = x^3+3x+2$

2. Найти промежутки монотонности функции:

Вариант 1	**Вариант 2**
а) $y = \frac{x^4}{4}+8x+5$	б) $y = x^3-5x^2+3x+11$
в) $y = 0,25x+x^2-6$	г) $y = -x+6x^2+9x+6$
д) $y = 6x - x^3$	е) $y = x^2-3x$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8

по теме: «Исследование функции»

Цель: сформировать умение исследовать функции и строить их графики

Теоретические сведения к практической работе

Схема исследования функций:

1) Найти область определения функции.
2) Установить, не является ли функция четной, нечетной, периодической.
3) Найти точки разрыва и исследовать пределы функции в этих точках.
4) Найти точки экстремума и значения функции в этих точках.
5) Исследовать интервалы возрастания и убывания функции (для исследования функции на возрастание и убывание находят производную f'(x) функции f(x) определяют ее знак. (Если f'(x) ¿ 0, то f(x) возрастает; если f'(x) ¿ 0, то f(x) убывает)
6) Найти точки перегиба.
7) Исследовать график функции на выпуклость и вогнутость.
8) Найти точки пересечения с осями координат.
9) Определить промежутки *знакопостоянства* функции, т.е. промежутки, на которых f(x) ¿ 0 и f(x) ¿ 0.
10) Построить график заданной функции.

Пример 1. Исследовать функцию y = $\frac{x^2+3}{x-1}$ и построить ее график.

Решение.

1) Область определения функции – вся числовая ось, кроме точки x = 1, поэтому, D(y) = (-∞; 1) ∪ (1; +∞).

2) Так как y(-x) = $\frac{(-x)^2+3}{-x-1}$ = - $\frac{x^2+3}{x-1}$, то функция ни четная и ни нечетная.

3)Так как y(x + T) = $\frac{(x+T)^2+3}{(x+T)-1}$ = $\frac{x^2+3}{x-1}$ ни при каком T ¿0, то данная функция не периодическая.

4) Строим прямую x = 1. В случае, когда x приближается к 1 слева, значения функции стремятся к – ∞, а в случае, когда x приближается к 1 справа, значения функции стремятся к + ∞. Так как y = $\frac{x^2-1}{x-1}$ + $\frac{4}{x-1}$ = x + 1 + $\frac{4}{x-1}$, то при |x| → ∞, график этой функции приближается к графику функции y_1 = x +1.

5) Находим производную y′ = $2x(x-1)-\frac{(x¿¿2+3)}{(x-1)^2}¿$ = $\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

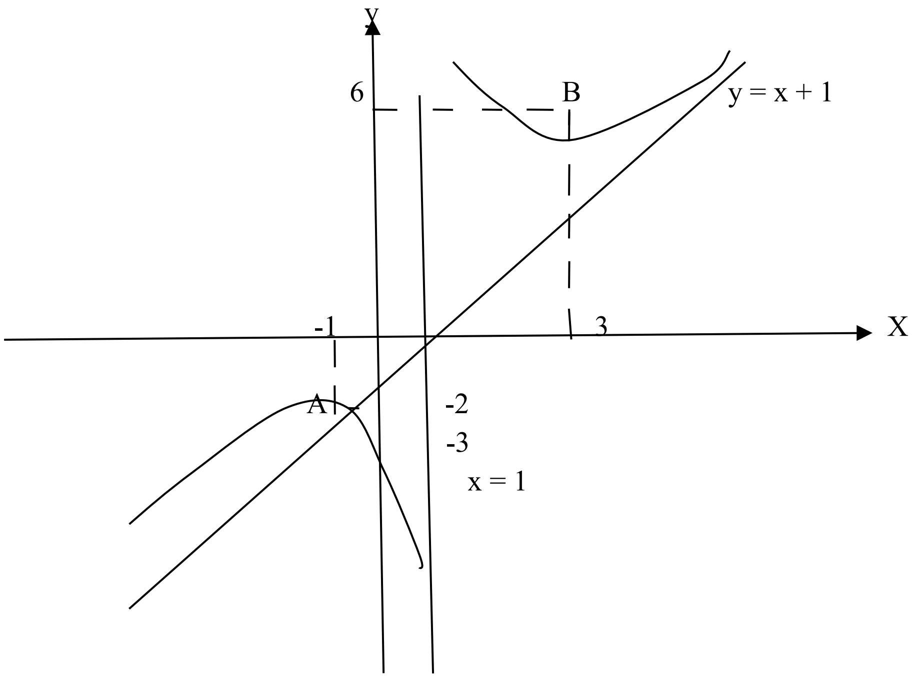
и из уравнения x^2- 2x – 3 = 0 определяем критические точки: x_1 = - 1 и x_2 = 3. Так как для точек интервала (- ∞; - 1) производная имеет знак «+», а для точек интервала (- 1; 1) производная имеет знак «-», то точка x_1 = -1 является точкой максимума функции. Аналогично убеждаемся, что точка x_2 = 3 является точкой минимума функции.

6) Так как уравнение x^2 + 3 = 0 не имеет действительных корней, то график функции не пересекает ось 0x.

7) На интервале (- ∞; - 1) функция возрастает, на интервале (- 1; 1) – убывает, на интервале (1; 3) вновь убывает, на интервале (3; + ∞) – возрастает. Найдем точки графика при x_1 = - 1 и x_2 = 3; A (- 1; - 2); B (3; 6).

8) Найдем точки пересечения графика функции с осью 0y: y(0) = - 3.

9) Построим график исходной функции.



Пример 2. Построить график функции $y=\frac{x^2+2}{x^2-1}$

Решение:

1) Область определения функция (О.О.Ф.) D (f): x $\in R, x^2-1\neq 0$. Знаменатель дроби не может быть равен нулю.

$$x^2-1\neq 0,\quad x^2\neq 1,\quad x^2\neq\pm\sqrt{1},\quad x_1\neq 1,\quad x_2\neq -1$$

$$D(f): x\in R,\ x\neq 1,\ x\neq -1$$

2) Область значения функции: (О. З. Ф.) E (f): $y\in R,\ y(1),\ y(-1)$ не существует.

3) x=1, x=-1 – вертикальные асимптоты. X=1-прямая, параллельная оси Оу и проходящая через точку (1; 0)

X=-1 – прямая, параллельная, оси Оу и проходящая через точку (-1; 0).

Асимптота – это ограничительная прямая, к которой стремится график функции при неограниченном удалении от начала координат точки О (0;0).

В точках x=1 и x=-1 функция терпит разрыв.

4) $y\,(-x)=\frac{(-x)^2+2}{(-x)^2-1}=\frac{x^2+2}{x^2-1}=y(x)$ - функция четная.

5) Точки пересечения с осями координат:

1) с осью Ox:

$$y=0;\ \frac{x^2+2}{x^2-1}=0;\ ¿\{x^2+2=0¿¿¿$$

Уравнение $x^2=-2$ решений не имеет в точках x=1, x=-1 – функция терпит разрыв. Точек пересечения с осью Ox график функции не имеет.

2) с осью Oy:

$x=0;\ y(0)=\frac{0^2+2}{0^2-1}=\frac{2}{-1}=-2$ в точке (0; 2) график функции пересекает ось Oy.

6)

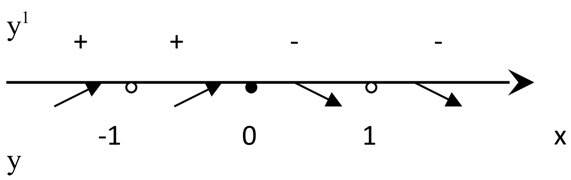
$$y^1=\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^1=¿|y^1=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^1=\frac{f^1(x)\cdot g(x)-g^1(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}¿||f(x)=x^2+2;\ f^1=(x^2)^1+2^1=2x+0=2x¿|¿¿$$

$$¿$$

$$y^1=0\ ¿\{-6x=0¿¿¿$$

Стационарная точка x=0

Точки разрыва x=1 и x=-1.



$$y^1=\frac{-6x}{(x^2-1)^2}$$

$x_{max}=0$, x_{min} нет

Значение функции в точке экстремума.

$$y(0)=\frac{0^2+2}{0^2-1}=\frac{2}{-1}=-2$$

7) y" в виду сложности вычислений не находим.

8)

x	-4	-3	-2	-0,5	0	0,5	2	3	4
y	1,2	1,4	2	-3	-2	-3	2	1,4	1,2

$y(-4)=\frac{(-4)^2+2}{(-4)^2-1}=\frac{16+2}{16-1}=\frac{18}{15}=1{,}2$

$y(-4)=y(4)$ *т.к. функция четная.*

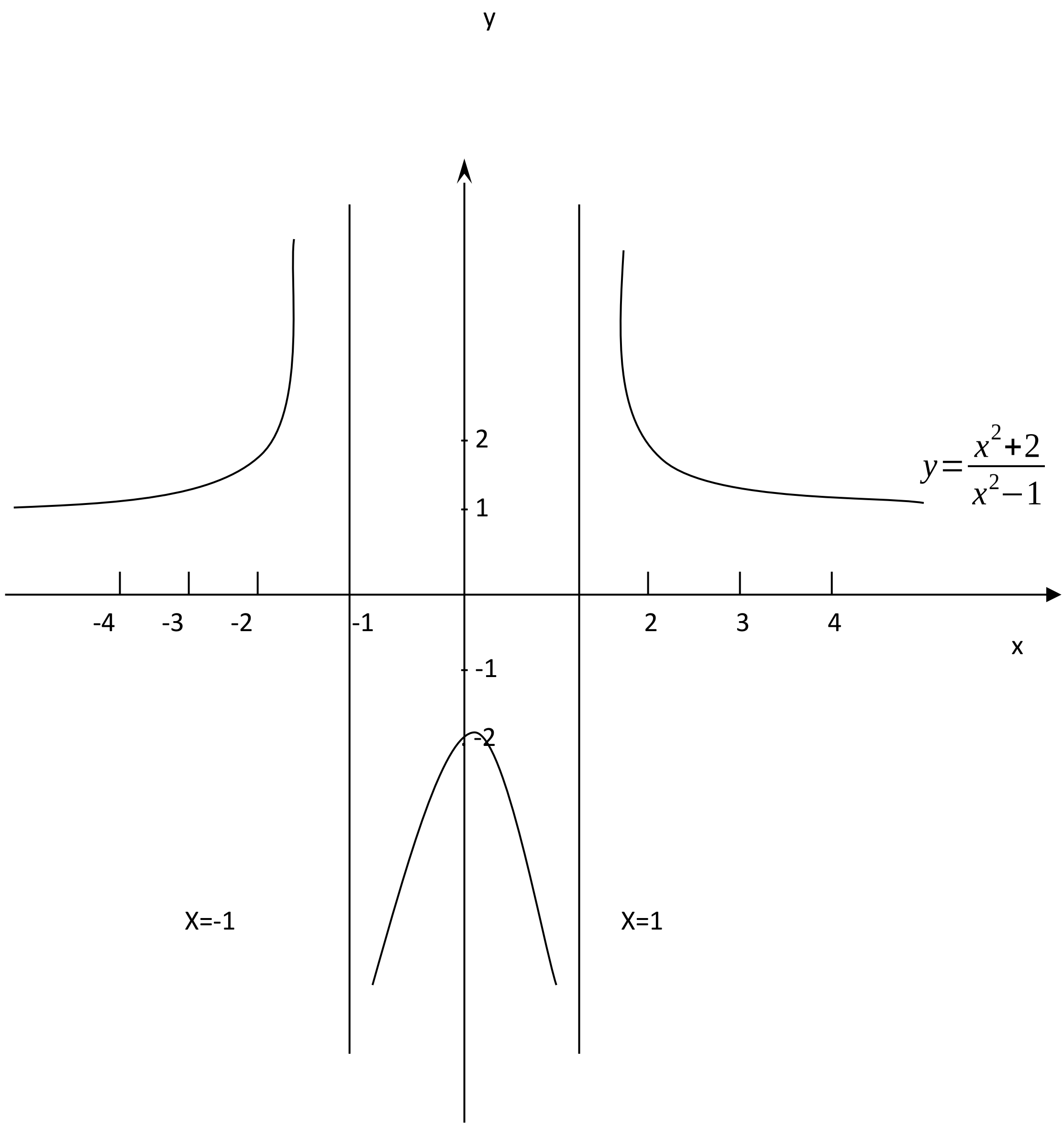
$y(-3)=\frac{(-3)^2+2}{(-3)^2-1}=\frac{9+2}{9-1}=\frac{11}{8}\approx 1{,}4;\ y(-3)=y(3)=1{,}4$

$y(-2)=\frac{(-2)^2+2}{(-2)^2-1}=\frac{4+2}{4-1}=\frac{6}{3}=2;\ y(-2)=y(2)=2$

$y(-1)=\frac{(0{,}5)^2+2}{(-0{,}5)^2-1}=\frac{0{,}25+2}{0{,}25-1}=\frac{2{,}25}{-0{,}75}=-3;\ y=(-0{,}5)=y(0{,}5)=3$

$y(0)=\frac{0^2+2}{0^2-1}=\frac{2}{-1}=-2$

9)



Фронтальная практическая работа

Задание 1. Исследуйте функцию и постройте ее график

1. $y = x^2 + 2x$;
2. $y = 3x - x^3$;
3. $y = \frac{x}{x^2-1}$;
4. $y = x + \frac{1}{x}$;
5. $y = x\sqrt{x} - 6x$;
6. $x^3 - 6x^2$.

Индивидуальная практическая работа

.Исследовать функцию с помощью производной и построить ее график:

Вариант 1

1) $y=x^3-6x^2+9x-3$; 2) $y=\frac{9+x^2}{3x}$; 3) $y=\frac{x^2}{x-1}$; 4) $y=\frac{x^2+1}{x}$; 5) $y=\frac{x-2}{x^2}$

Вариант 2

Исследовать функцию с помощью производной и построить ее график:

1) $y=16x^3-12x^2-4$; 2) $y=\frac{x^2+1}{x}$; 3) $y=\frac{x^2}{x-3}$; 4) $y=\frac{x^2+x-6}{x^2}$; 5) $y=\frac{x^3}{9-x^2}$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ № 9, 10, 11

по темам: «Вычисление неопределенных интегралов непосредственным методом», «Вычисление неопределенных интегралов методом подстановки», «Вычисление неопределенных интегралов методом интегрирования по частям»

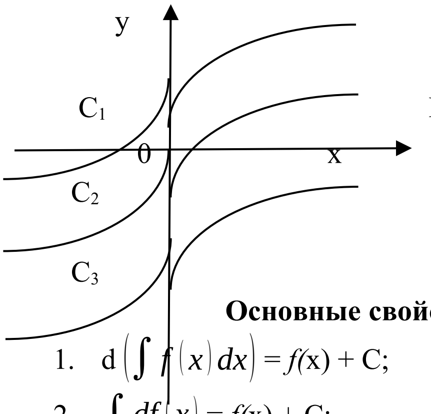
Цель: сформировать умение вычислять неопределенные интегралы, используя различные методы интегрирования

Теоретические сведения к практической работе

Неопределенный интеграл функции y = *f(*x) – это совокупность всех первообразных функций F(x) + C для функции *f(*x). Обозначается символом $\int f(x)dx$= F(x) + C, где $\int$ –*знак интеграла;* *f*(x) – *подынтегральная функция;* *f(*x) *d*x – *подынтегральное выражение;* C – *постоянная интегрирования*, способная принимать любое значение; x – переменная интегрирования.

Интегрирование – это процесс отыскания первообразной по ее производной, это действие, обратное дифференцированию.

Геометрический смысл неопределенного интеграла: это семейство кривых, зависящих от одного параметра C, которые получаются путем параллельного переноса вдоль оси 0y.



Кубическая парабола y = $\int 3x^2 dx = x^3 +$ ¿C;

Основные свойства неопределенного интеграла

1. d$\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$ + C;
2. $\int df(x) = f(x)$ + C;
3. $\int C f(x) dx$ = C $\int f(x) dx$ – постоянный множитель можно выносить за знак интеграла;
4. $\int (f(x)+g(x))dx$ = $\int f(x)dx$ + $\int g(x)dx$ - интеграл суммы равен сумме интегралов.

Основные способы интегрирования

1. *Метод непосредственного интегрирования*, который заключается в использовании основных свойств неопределенного интеграла и приведении подынтегрального выражения к табличному виду.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int \left(\frac{3}{x} + 2\sin x\right) dx$.

Решение. Используя 3 и 4 свойства неопределенного интеграла и таблицу интегрирования, получаем (таблица прилагается)

$\int \left(\frac{3}{x} + 2\sin x\right) dx = 3 \int \frac{dx}{x} + 2 \int \sin x\, dx = 3 \ln$ ¿x∨¿¿- 2cos x + C.

2. *Метод подстановки или метод введения новой переменной.*

Это самый эффективный прием сведения неопределенного интеграла к табличному виду.

Пример 2. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx$.

Решение. Положим x + 1 = t, тогда x = t – 1; $x^2 = (t-1)^2$; $(x+1)^3 = t^3$. Продифференцировав x + 1 = t, получим $dx = dt$.

$\int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx = \int$ ¿¿¿ $= \int \frac{t^2+2t+1}{t^3} dt = \int \frac{dt}{t} - 2\int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t^3} = \int \frac{dt}{t} - 2\int t^{-2} dt + \int t^{-3} dt =$

ln ¿t∨¿¿ $- 2\,\frac{t^{-1}}{-1} + \frac{t^{-2}}{-2} =$ ln ¿t∨¿¿ $+ \frac{2}{t} - \frac{1}{2t^2}$ + C = ln ¿$x+1$∨¿¿+ $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2}$ + C.

3. *Метод интегрирования по частям.*

Пусть функция u = u(x) и v = v(x) определены и непрерывно дифференцируемые функции, то справедлива формула интегрирования по частям: $\int udv$= uv - $\int vdu$.

Пример 3. Найти $\int \ln x\, dx$.

Решение. Обозначим u = ln x; dv = dx, $\int dv = \int dx$,т.е. v = x; du = (ln x)' dx. По формуле (1) получаем: $\int \ln x\, dx =$

x ln x – $\int x$ ¿¿ = x ln x – $\int x \cdot \frac{1}{x} dx$ = x ln x - x + C = x (ln $x - 1$)+ C.

<u>Фронтальная практическая работа.</u>

Задание 1. Найти неопределенный интеграл:

1. $\int (x¿¿7+4)dx¿;$
2. $\int (2+x)^7 dx;$
3. $\int \frac{dx}{25+x^2};$
4. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1};$
5. $\int x^2 sinx\,dx;$
6. $\int \frac{x^4-5x^3+1}{x}dx;$
7. $\int \sin^2 x\,dx;$
8. $\int \frac{(3x+1)^2}{x}dx;$
9. $\int \frac{7\,dx}{\sqrt{3-5x^2}};$
10. $\int x^2 e^x dx.$

<u>Индивидуальная практическая работа</u>

Задание 1. Найти неопределенный интеграл:

Блок А

1) $\int 5\,dx;$

$2¿\int 4(x^2-x+3)dx\,;$

3) $\int 2^x dx;$

$4¿\int x^{-4} dx\,;$

$5¿\int \frac{3dx}{x};$

6) $\int cos(5x-3)dx.$

Блок Б

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}};$

2) $\int (3x^{-4}+8x^{-5})dx;$

$3¿\int \frac{x^3+3x^2+4x}{x}dx;$

4) $\int e^{-3x^2} x\,dx;$

5) $\int \frac{dx}{x+1};$

6) $\int (3x+2)^5 dx.$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ № 12, 13

по темам: «Вычисление определенных интегралов», «Вычисление площадей плоских фигур"

Цель: сформировать умение вычислять определенные интегралы, используя различные методы интегрирования; вычислять площади плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Теоретические сведения к практической работе

Определенный интеграл – это общий предел всех интегральных сумм функции *f*(x) на отрезке [*a, b*]. Определенный интеграл обозначается: $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – подынтегральная функция; x – переменная интегрирования; число *a* называется *нижним пределом* интеграла, *b* – *верхним*; [*a, b*] – *промежуток интегрирования***.**

Если F(x) – первообразная функция для непрерывной функции y = f(x), т.е. F'(x) = f(x), то имеет место формула:

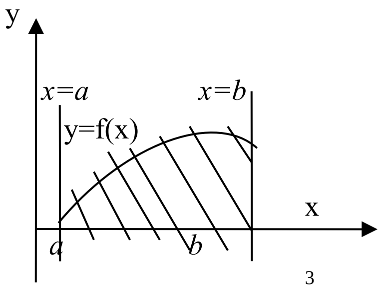
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Это формула Ньютона – Лейбница – основная формула интегрального исчисления, устанавливающая связь между определенным и неопределенным интегралом. Она читается так: ***Определенный интеграл* – это разность значений любой первообразной функции для *f(x)* при верхнем и нижнем пределах интегрирования.** Разница между определенным и неопределенным интегралами: определенный интеграл – это число, а неопределенный интеграл – это функция.

Основные свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов изменяется знак интеграла:
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$
2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:
$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$
3. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \text{¿} \int_c^b f(x)dx.$$
4. Определенный интеграл от алгебраической суммы(разности) функций равен алгебраической сумме(разности) их определенных интегралов:
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$
5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:
$$\int_a^b C f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$
6. Если функция *f(x)*≥0 всегда на отрезке [*a*,b], то $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$
7. Если *f*(x) ≤ *g(x)* *всюду* на отрезке [a,b], то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

Геометрический смысл определенного интеграла: он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми x = *a*, *x* = *b* и частью графика функции y = *f(x),* взятой со знаком плюс, если функция положительна, и со знаком минус, если функция отрицательна
Геометрическая интерпретация определенного интеграла:



Пример 1. Вычислите: $\int_2^3 3x^2 dx.$

Решение. Применим формулу Ньютона – Лейбница и свойства определенного интеграла:
$$\int_2^3 3x^2 dx = 3\int_2^3 x^2 dx = x^3|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19.$$

Пример 2. Вычислите: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x+3)^3}$.

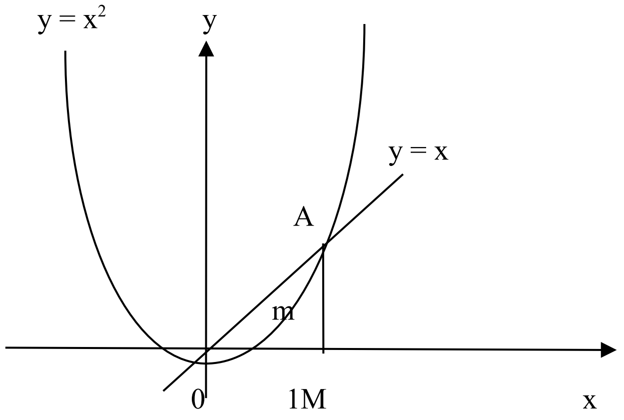
***Решение*.** Обозначим 4x + 3 = z, откуда 4dx = dz или dx = $\frac{dz}{4}$;

при x = – 1, $t_н$ = – 4 + 3 = – 1; при x = 1, $t_в$ = 4 +3 = 7. Следовательно,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x+3)^3} = \int_{-1}^{7} \frac{dz}{4z^3} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{7} z^{-3}dz = \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{2\cdot 7^2} + \frac{1}{2\cdot 1}\right) = \frac{13}{112} .$$

Пример 3. Вычислить площадь, ограниченную графиками функций y = x^2 и y = x.

Решение. Построим графики данных функций, найдя предварительно точки их пересечения путем совместного решения уравнений: y = x^2, y = x. Решив систему, получим точки O (0; 0) и A (1; 1).



Δ

$\int_0^1 x\,dx \quad \frac{x^2}{2}\begin{matrix}1\\0\end{matrix} \quad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}$

Взяв f(x) = x, вычислим площадь ΔOAM, взяв f(x) = x^2 , вычислим площадь криволинейной трапеции OmAB. Затем из первого результата вычтем второй.

Итак, $\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$;

$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - 0 = \frac{1}{3}$.

Следовательно, площадь S фигуры, ограниченная заданными линиями S = $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{6}$ (кв.ед.)

Фронтальная практическая работа.

Задание 1. Вычислите:

1¿ $\int_1^4 \frac{32}{x^3}dx$; 2) $\int_2^5 \frac{(x-1)^3}{x^2}dx$; 3) $\int_0^{\pi}$ ¿¿; 4) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^4}$; 5) $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$.

Задание 2. Определить площадь полуволны синусоиды.

Задание 3. Определить площадь, ограниченную графиками функций y = x^2 и y = 3x.

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции y = $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, осью 0x и прямыми x = 0 и x = 4.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 14

Контрольная работа № 1

Цель: проверить знания и умения по теме «Дифференциальное и интегральное исчисление».

Задание 1. Найти производные 1-го порядка данных функций

1) $a)\ y = 3x^3 - \dfrac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}$; $б)\ s = (1+t^2)(2-3\operatorname{arcctg} t)$; $в)\ u = \ln^3 \dfrac{V}{2}$; $г)\ z = \dfrac{5-\sin 3t}{e^{4t}}$.

2) $a)\ y = 5x - \dfrac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$; $б)\ s = (4-3\ln t)(5+2\sin t)$; $в)\ u = \sin^4(2V+3)$; $г)\ z = \dfrac{\sin(2-t)}{2-\ln 3t}$.

3) $a)\ y = 7x^2 + \dfrac{4}{x^6} - \sqrt[5]{x^2}$; $б)\ s = (3-\cos t)(5+6\sin t)$; $в)\ u = \sqrt[3]{1-4V^2}$; $г)\ z = \dfrac{t^3-e^{3t}}{\arccos 2t}$.

4) $a)\ y = 5x^2 + \dfrac{3}{x^4} - \sqrt[6]{x^7}$; $б)\ s = (3t^3-4)(t-2\cos t)$; $в)\ u = \ln^2(5V-3)$; $г)\ z = \dfrac{\ln(4-5t)}{\sin t}$.

5) $a)\ y = x^5 - \dfrac{2}{x^3} + 2\sqrt[7]{x^5}$; $б)\ s = t^4(4+\operatorname{arctg} t)$; $в)\ u = \cos^3(3V+1)$; $г)\ z = \dfrac{t-\arcsin 5t}{e^{-t}}$.

6) $a)\ y = x^4 + \dfrac{1}{x} - 2\sqrt[3]{x}$; $б)\ s = (3+\operatorname{tg} t)(1-4\operatorname{ctg} t)$; $в)\ u = tg^4(3V+2)$; $г)\ z = \dfrac{\operatorname{arctg} 2t}{1+4t^2}$.

Задание 2. Вычислить интегралы.

1) $\displaystyle\int\left(\frac{7}{x^2+16} - \frac{x^4+5}{x^5} + 3\sqrt{x}\right)dx$ $\displaystyle\int\left(\frac{5}{5x^2+5} + 7^x - \frac{\sin 2x}{\cos x}\right)dx$

2) $\displaystyle\int\left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}} - \frac{2x^2+10}{x} + 4\sqrt[6]{x^5}\right)dx$ $\displaystyle\int\left(\frac{2}{2x^2+2} + 2^x - \frac{x^2-4}{x+2}\right)dx$

3) $\displaystyle\int\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{\sqrt{x^2+3}} + 4e^x\right)dx$ $\displaystyle\int\left(\frac{12}{3+3x^2} - 3\cos x + \frac{x^2-9}{x-3}\right)dx$

4) $\displaystyle\int\left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}} + \frac{6+x^3}{x^4} - 3\sqrt[8]{x^5}\right)dx$ $\displaystyle\int\left(\frac{6}{2x^2+2} - 2\sin x + 3^x\right)dx$

5) $\displaystyle\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{4x^2-1}{x^3} - 2\sqrt[8]{x^3}\right)dx$ $\displaystyle\int\left(\frac{6}{3x^2-9} + \frac{3\sin^3 x-5}{\sin^2 x}\right)dx$

6) $\displaystyle\int\left(\frac{3\cos^3 x-2}{\cos^2 x} - 5\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ $\displaystyle\int\left(\frac{16}{2x^2-8} - \frac{3-x^3}{x^4} + 5^x\right)dx$

Задание 3. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$ $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$ $\displaystyle\int e^{1-3x}\,dx$

2) $\displaystyle\int(2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$ $\displaystyle\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$ $\displaystyle\int e^{6x+5}\,dx$

3) $\int 10^{2x+1}\,dx$ $\quad \int \sin\frac{x}{2}\,dx$ $\quad \int \frac{dx}{5x+3}$

4) $\int x^2(3-x^3)^{10}\,dx$ $\quad \int \cos 2x\,dx$ $\quad \int e^{\sin x}\cos x\,dx$

5) $\int \frac{dx}{x\ln x}$ $\quad \int \sin 2x\,dx$ $\quad \int 3^{7x-1}\,dx$

6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \int \sin(2-3x)\,dx$ $\quad \int \frac{dx}{e^{3x}}$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_1^2 (x^3+10x)\,dx$ 2) $\int_{-2}^3 (3x^2+6x-2)\,dx$ 3) $\int_1^3 (x^2-16x+3)\,dx$ 4) $\int_0^8 (21x-19)\,dx$

5) $\int_{-4}^0 (x^3+8)\,dx$ 6) $\int_{10}^{13} (2x+7)\,dx$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ № 15, 16

по темам: «Решение дифференциальных уравнений с разделенными переменными», «Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными».

Цель: сформировать умение решать дифференциальные уравнения с разделенными переменными; умение решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Теоретические сведения.

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными имеют вид f(y)dy=g(x)dx. К ним сводятся многие дифференциальные уравнения первого порядка. В общем случае решение такого уравнения — это интегрирование обеих частей:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx.$$

Однако оставлять ответ в таком виде не принято. Нужно взять интегралы от обеих функций, если это возможно.

<u>Замечание</u>

Другая форма записи дифференциального уравнения с разделенными переменными:f(y)dy+g(x)dx=0. Его общее решение, заданное в неявном виде, выглядит так:

$$\int f(y)dy + \int g(x)dx = C$$

и называется общим интегралом уравнения.

Проиллюстрируем решение дифференциальных уравнений с разделенными переменными конкретными примерами.

Примеры.

Решить уравнение

$1)\ \cos y dy + 2xdx = 0$.

Решение.

Переносим слагаемое с x в левую часть и интегрируем:

$$\cos y dy = -2x dx$$

$$\int \cos y dy = -2\int x dx$$

Получаем

$$\sin y = -2\cdot\frac{x^2}{2} + C, \Rightarrow \sin y + x^2 = C.$$

Общее решение записано в виде неявно заданной функции: F(x;y)=0.

$$2) e^{5y} dy + \frac{4x-5}{x^2-5x+12} dx = 0.$$

Решение.

Переносим слагаемое с иксом в левую часть и интегрируем:

$$\int e^{5y} dy = -\int \frac{4x-5}{x^2-5x+12} dx$$

Замечаем, что $(x^2-5x+12)'=4x-5$. Значит, выражение $x^2-5x+12$ можно подвести под знак дифференциала: $d(x^2-5x+12)=(4x-5)dx$,

$$\int e^{5y} dy = -\int \frac{d(x^2-5x+12)}{x^2-5x+12}$$

$$\frac{1}{5}e^{5y} = -\ln(x^2-5x+12) + C, \Rightarrow \frac{1}{5}e^{5y} + \ln(x^2-5x+12) = C.$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{y}} dy + \sin x \cos^4 x dx = 0.$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} dy = -\sin x \cos^4 x dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = -\int \sin x \cos^4 x dx$$

В правой части — табличный интеграл. В левой — можно подвести косинус под знак интеграла. Но ради разнообразия сделаем замену:

cos x=t, отсюда dt = (cos x)’dx=-sinxdx. Отсюда

$$2\sqrt{y} = \int t^4 dt, \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{t^5}{5} + C, \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{\cos^5 x}{5} + C,$$

и можно записать решение в виде общего интеграла

$$2\sqrt{y} - \frac{\cos^5 x}{5} = C,$$

либо выразить y через x:

$$2\sqrt{y} = \frac{\cos^5 x}{5} + C_1$$

Умножаем обе части равенства на 2, затем вoводим в квадрат:

$$\sqrt{y} = \frac{2\cos^5 x}{5} + 2C_1, \Rightarrow y = \frac{4\cos^{10} x}{25} + 4{C_1}^2$$

Обозначим

$$4{C_1}^2 = C, \Rightarrow y = \frac{4\cos^{10} x}{25} + C.$$

Здесь удалось выразить ответ в виде функции в явном виде: y=f(x).

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными – это уравнения вида $s(x)p(y)y' + q(x)r(y) = 0$

Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

В исходном уравнении:

$$s(x)p(y)y' + q(x)r(y) = 0 \qquad (1)$$

Выразим y' через дифференциалы:

$$y' = \frac{dy}{dx};$$

$$s(x)p(y)\frac{dy}{dx} + q(x)r(y) = 0;$$

Умножим на dx:

$$s(x)p(y)dy + q(x)r(y)dx = 0;$$

Иногда уравнение задается в таком виде. Это означает, что переменные x и y равноправны.
Разделим уравнение на s(x)r(y):

$$\frac{p(y)dy}{r(y)} + \frac{q(x)dx}{s(x)} = 0$$

Интегрируем:

$$\int \frac{p(y)dy}{r(y)} + \int \frac{q(x)dx}{s(x)} = C \qquad (2)$$

Поскольку мы делили на s(x)r(y), то получили интеграл уравнения при $s(x) \neq 0$ и $r(y) \neq 0$. Далее следует рассмотреть решения, определяемые уравнениями s(x)= 0 и r(y)= 0, которые могут давать несколько значений типа x = const, y = const, также удовлетворяющие исходному уравнению (1). Часть этих решений может уже содержаться в решении (2).

Примеры. 1) Решить уравнение $y' = \sqrt[3]{y}x^2$

<u>Решение</u>.

Выразим y' через дифференциалы:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$;

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}\,x^2$$

Умножим на dx и разделим на $\sqrt[3]{y}$. При $y \neq 0$ уравнение принимает вид:

$$\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = x^2 dx$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \int x^2 dx + C \qquad (3)$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$$

Вычисляем интегралы, применяя формулу из таблицы интегралов:

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \int y^{-\frac{1}{3}}\,dy \; = \; \frac{1}{-\frac{1}{3}+1}\,y^{-\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{2}\,y^{\frac{2}{3}}$$

$$\left[-\frac{1}{3}+1 = \frac{-1+3}{3} = \frac{2}{3}\right]; \left[\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\right]$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{2+1}\int x^{2+1} = \frac{1}{3}\,x^3$$

Подставляем в (3). В результате получаем общий интеграл уравнения:

$$\frac{3}{2}\,y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\,x^3 + C \qquad (4)$$

Теперь рассмотрим случай, когда y = 0.

Поскольку y' = (0)' = 0 (производная от постоянной всегда равна нулю), то выражение y = 0 удовлетворяет исходному уравнению и не входит в полученное решение $\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}x^3+C$

(подставим y = 0: $\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}0^{\frac{2}{3}} = 0=\frac{1}{3}x^3+C$ - уравнение не выполняется ни при каком значении постоянной С)

Поэтому к общему интегралу (4) добавим решение y = 0.

<u>Ответ:</u>

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}x^3+C\,;\quad y=0$$

2) Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx}=y(y+2)$.

Решение.

В данном случае $p(x) = 1$ и $h(y) = y(y+2)$. Разделим уравнение на $h(y)$ и перенесем dx в правую часть:

$$\frac{dy}{y(y+2)}=dx.$$

Заметим, что при делении мы могли потерять решения $y = 0$ и $y = -2$ в случае когда $h(y)$ равно нулю. Действительно, убедимся, что $y = 0$ является решением данного дифференциального уравнения. Пусть $y=0,\quad dy=0.$

Подставляя это в уравнение, получаем: 0 = 0. Следовательно, $y = 0$ будет являться одним из решений. можно проверить, что $y = -2$ также является решением уравнения.

Вернемся обратно к дифференциальному уравнению и проинтегрируем его:

$$\int\frac{dy}{y(y+2)}=\int dx+C.$$

Интеграл в левой части можно вычислить методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{y(y+2)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y+2},$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{y(y+2)}=\frac{A(y+2)+By}{y(y+2)},$$

$$\Rightarrow\ 1\equiv Ay+2A+By,$$

$$\Rightarrow\ 1\equiv(A+B)y+2A,$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}A+B=0\\2A=1\end{cases},\quad\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Таким образом, мы получаем следующее разложение рациональной дроби в подынтегральном выражении:

$$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right)dy = \int dx + C$$

$$\frac{1}{2}\left(\int\frac{dy}{y} - \int\frac{dy}{y+2}\right) = \int dx + C$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln|y| - \ln|y+2|\right) = x + C$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = x + C$$

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = 2x + 2C.$$

Переименуем константу: $2C = C_1$. В итоге, окончательное решение уравнения записывается в виде:

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = 2x + C_1, \quad y = 0, \quad y = -2.$$

Общее решение здесь выражено в неявном виде. В данном примере мы можем преобразовать его и ответ в явной форме в виде функции $y = f(x, C_1)$, где C_1 − некоторая константа. Однако это мож не для всех дифференциальных уравнений.

3) Решить дифференциальное уравнение $\left(x^2+4\right)y' = 2xy$ **.**

Решение.

Запишем данное уравнение в следующем виде:

$$\left(x^2+4\right)dy = 2xydx.$$

Разделим обе части на $(x^2 + 4)y$:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{x^2+4}.$$

Очевидно, что $x^2 + 4 \neq 0$ для всех действительных x. Проверим, что $y = 0$ является одним из решений уравнения. После подстановки $y = 0$ и $dy = 0$ в исходное дифференциальное уравнение видно, что 0 действительно является решением уравнения.

Теперь можно проинтегрировать полученное уравнение:

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{2xdx}{x^2+4} + C, \quad \Rightarrow \ln|y| = \int\frac{d\left(x^2\right)}{x^2+4} + C.$$

Заметим, что $dx^2 = d(x^2 + 4)$. Следовательно,

$$\ln|y| = \int\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4} + C, \quad \Rightarrow \ln|y| = \ln\left(x^2+4\right) + C.$$

Представим константу C как lnC_1, где $C_1 > 0$. Тогда

$$\ln|y| = \ln\left(x^2+4\right) + \ln C_1,$$

$$\ln|y| = \ln\left(C_1\left(x^2+4\right)\right),$$

$$|y| = C_1\left(x^2+4\right),$$

$$y = \pm C_1\left(x^2+4\right).$$

Таким образом, заданное дифференциальное уравнение имеет следующие решения:

$$y = \pm C_1\left(x^2+4\right), \quad y = 0, \quad \text{где} \quad C_1 > 0.$$

Полученный ответ можно упростить. В самом деле, введем произвольную константу C, принимающую от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда решение можно записать в виде:

$$y = C\left(x^2+4\right).$$

При $C = 0$, оно становится равным $y = 0$.

4) Найти все решения дифференциального уравнения $y' = -xe^y$.

Решение.

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = -xe^y,$$

$$\frac{dy}{e^y} = -xdx,$$

$$e^{-y}dy = -xdx.$$

Очевидно, что деление на e^y не приводит к потере решения, поскольку $e^y > 0$. После интегрирования получаем

$$\int e^{-y}dy = \int(-x)dx + C,$$

$$-e^{-y} = -\frac{x^2}{2} + C \quad \text{или} \quad e^{-y} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Данный ответ можно выразить в явном виде:

$$-y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right) \quad \text{или} \quad y = -\ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

В последнем выражении предполагается, что константа $C > 0$, чтобы удовлетворить области определения логарифмической функции.

4) Найти частное решение дифференциального уравнения $x(y+2)y' = \ln x + 1$ **при условии $y(1) = -1$.**

Решение.

Разделим обе части уравнения на x:

$$x(y+2)\frac{dy}{dx}=\ln x+1,$$

$$(y+2)dy=\frac{(\ln x+1)dx}{x}.$$

Мы предполагаем, что $x \neq 0$, поскольку областью определения исходного уравнения является множество $x > 0$.
В результате интегрирования получаем:

$$\int(y+2)\,dy=\int\frac{(\ln x+1)dx}{x}+C.$$

Интеграл в правой части вычисляется следующим образом:

$$\int\frac{(\ln x+1)\,dx}{x}=\int(\ln x+1)d(\ln x)=\int(\ln x+1)d(\ln x+1)=\frac{(\ln x+1)^2}{2}.$$

Следовательно, общее решение в неявной форме имеет вид:

$$y^2+2y=\frac{(\ln x+1)^2}{2}+C,$$

$$2y^2+4y=(\ln x+1)^2+C_1,$$

где $C_1 = 2C$ − постоянная интегрирования.

Найдем теперь значение C_1, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = -1$:

$$2(-1)^2+4(-1)=(\ln 1+1)^2+C_1,$$

$$\Rightarrow\ C_1=-3.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения с заданным начальным условием (задача Коши) описывается алгебраическим уравнением:

$$2y^2+4y=(\ln x+1)^2-3.$$

Фронтальная практическая работа.

1. Решить дифференциальное уравнение $xy'=y$.
2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'=-2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=2$.
3. Решить дифференциальное уравнение $y'+(2y+1)ctgx=0$.
4. Найти частное решение дифференциального уравнения $y\ln y+xy'=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=e$.
5. Проинтегрировать дифференциальное уравнение: $(1+x^2)dy-2xydx=0$.
6. Найти общий интеграл уравнения

$$\sqrt{4-x^2}\cdot y'+xy^2+x=0.$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ № 17, 18

по темам: «Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка», «Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка».

Цель: сформировать умение решать дифференциальные уравнения с разделенными переменными; умение решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Теоретические сведения.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение линейного уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + a(x)y = f(x),$$

где $a(x)$ и $b(x)$ − непрерывные функции x, называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка*. Мы рассмотрим решения указанных уравнений методом вариации постоянной.

Метод вариации постоянной

Данный метод аналогичен предыдущему подходу. Сначала необходимо найти общее решение *однородного уравнения*:

$$y' + a(x) = 0.$$

Общее решение однородного уравнения содержит постоянную интегрирования C. Далее мы заменяем константу C на некоторую (пока еще неизвестную) функцию $C(x)$. Подставляя это решение в неоднородное дифференциальное уравнение, можно определить функцию $C(x)$.

Описанный алгоритм называется *методом вариации постоянной*.

Задача Коши

Если, кроме дифференциального уравнения, задано также начальное условие в форме $y(x_0) = y_0$, то такая задача называется *задачей Коши*.

Решение задачи Коши не содержит произвольной константы C. Ее конкретное числовое значение определяется подстановкой общего решения уравнения в заданное начальное условие $y(x_0) = y_0$.

Пример 1

Решить уравнение $y' - y - xe^x = 0$.

Решение.

Запишем данное уравнение в стандартной форме:

$$y' - y = xe^x.$$

Будем решать это уравнение, используя интегрирующий множитель:

$$u(x) = e^{\int(-1)dx} = e^{-\int dx} = e^{-x}.$$

Тогда общее решение линейного дифференциального уравнения определяется выражением:

$$y(x) = \frac{\int u(x) f(x) dx + C}{u(x)} = \frac{\int \cancel{e^{-x}}\, x \cancel{e^{x}} dx + C}{e^{-x}} = \frac{\int x dx + C}{e^{-x}} = e^x\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

Пример 2

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y + 2x^3$.

Решение.

Будем решать данную задачу методом вариации постоянной. Сначала найдем общее решение однородного уравнения:

$$xy' = y,$$

которое решается разделением переменных:

$$x\frac{dy}{dx} = y,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C, \text{ или}$$

$$y = Cx,$$

где C − произвольное положительное число.

Теперь заменим константу C на некоторую (пока неизвестную) функцию $C(x)$ и далее будем искать решение исходного неоднородного уравнения в виде:

$$y = C(x)x.$$

Производная равна

$$y' = \left[C(x)x\right]' = C'(x)x + C(x).$$

Подставляя это в дифференциальное уравнение, получаем:

$$x\left[C'(x)x + C(x)\right] = C(x)x + 2x^3,$$

$$C'(x)x^2 + \cancel{C(x)x} = \cancel{C(x)x} + 2x^3,$$

$$C'(x) = 2x.$$

Интегрируя, находим функцию $C(x)$:

$$C(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C_1,$$

где C_1 − произвольное действительное число.

Таким образом, общее решение заданного уравнения записывается в виде:

$$a(x) = -2.$$

Пример 3

Решить уравнение $y' - 2y = x.$

Решение.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y' - 2y = 0$$

и найдем его общее решение:

$$\frac{dy}{dx} = 2y, \quad \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx, \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int dx, \quad \Rightarrow \ln|y| = 2x + C,$$

$$\Rightarrow |y| = e^{2x+C} = e^{2x}e^{C} = C_1 e^{2x}, \quad \text{или} \quad y = \pm C_1 e^{2x} = Ce^{2x},$$

где C вновь обозначает произвольное действительное число. Заметим, что при $C = 0$, мы получаем решение $y = 0$, которое также удовлетворяет однородному уравнению.

Далее предположим, что C является функцией x и подставим решение $y = C(x)e^{2x}$ в исходное неоднородное уравнение. Выражение для производной имеет вид:

$$y' = \left[C(x)e^{2x}\right]' = C'(x)e^{2x} + C(x) \cdot 2e^{2x}.$$

Следовательно,

$$C'(x)e^{2x} + \cancel{2C(x)e^{2x}} - \cancel{2C(x)e^{2x}} = x,$$

$$C'(x) = e^{-2x}x,$$

$$C(x) = \int e^{-2x}x dx.$$

Этот интеграл уже был найден в пункте А, поэтому, можно записать:

$$C(x) = -\frac{1}{4}e^{-2x}(1+2x) + C.$$

В результате, общее решение неоднородного дифференциального уравнения выражается формулой:

$$y = C(x)e^{2x} = \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}(1+2x) + C\right]e^{2x} = -\frac{1}{4}(1+2x) + Ce^{2x}.$$

Однородные дифференциальные уравнения

Определение однородного дифференциального уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

называется *однородным*, если правая часть удовлетворяет соотношению

$$f(tx,ty) = f(x,y)$$

для всех значений t. Другими словами, правая часть должна являться однородной функцией нулевого порядка по отношению к переменным x и y:

$$f(tx,ty) = t^0 f(x,y) = f(x,y).$$

Однородное дифференциальное уравнение можно также записать в виде

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right),$$

или через дифференциалы:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ − однородные функции одинакового порядка.

Определение однородной функции

Функция $P(x,y)$ называется *однородной функцией* порядка n, если для всех $t > 0$ справедливо следующее соотношение:

$$P(tx,ty) = t^n P(x,t).$$

Решение однородных дифференциальных уравнений
Однородное дифференциальное уравнение можно решить с помощью подстановки $y = ux$, которая однородное уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение вида

$$\left(a_1x + b_1y + c_1\right)dx + \left(a_2x + b_2y + c_2\right)dy = 0$$

преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными посредством переноса начала системы точку пересечения прямых линий, заданных в уравнении. Если указанные прямые параллельны, то диффере уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными путем замены переменной:

$$z = ax + by.$$

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $\left(2x + y\right)dx - xdy = 0$.

Решение.
Нетрудно заметить, что многочлены $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, соответственно, при dx и dy, являются однородными функциями первого порядка. Поэтому, данное дифференциальное уравнение также будет однородным.

Положим $y = ux$, где u − некоторая новая функция, зависящая от x. Тогда

$$dy = d\left(ux\right) = udx + xdu.$$

Подставляя это в дифференциальное уравнение, получаем

$$\left(2x + ux\right)dx - x\left(udx + xdu\right) = 0.$$

Следовательно,

$$2xdx + \cancel{uxdx} - \cancel{xudx} - x^2du = 0.$$

Разделим обе части уравнения на x:

$$xdu = 2dx, \quad \text{или} \quad du = 2\frac{dx}{x}.$$

Выполняя деление x, мы могли потерять решение $x = 0$. Прямая подстановка показывает, что $x = 0$ действительно является одним из решений нашего уравнения.

Интегрируем последнее выражение:

$$\int du = \int 2\frac{dx}{x}, \quad \text{или} \quad u = 2\ln\left|x\right| + C,$$

где C − постоянная интегрирования.

Возвращаясь к старой переменной y, можно записать:

$$y = ux = x\left(2\ln\left|x\right| + C\right).$$

Таким образом, уравнение имеет два решения:

$$y = x\left(2\ln|x| + C\right), \quad x = 0.$$

Пример 2

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$.

Решение.

Заметим, что корень $x = 0$ не принадлежит области определения, заданного дифференциального уравнения. Перепишем уравнение в следующей форме:

$$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Как видно, уравнение является однородным.

Сделаем замену $y = ux$., Следовательно,

$$y' = (ux)' = u'x + u.$$

Подставляем полученное выражение в дифференциальное уравнение:

$$x\left(u'x + u\right) = ux\ln\frac{ux}{x}.$$

Разделим обе части на $x \neq 0$:

$u'x + u = u\ln u,$ или

$$\frac{du}{dx}x = u\ln u - u,$$

$$\frac{du}{dx}x = u\left(\ln u - 1\right).$$

В результате мы получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{u\left(\ln u - 1\right)} = \frac{dx}{x}.$$

На следующем шаге проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int\frac{du}{u\left(\ln u - 1\right)} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{d\left(\ln u\right)}{\ln u - 1} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{d\left(\ln u - 1\right)}{\ln u - 1} = \int\frac{dx}{x}.$$

Следовательно,

$$\ln\left|\ln u - 1\right| = \ln|x| + C.$$

Постоянную C здесь можно записать как $\ln C_1$ ($C_1 > 0$). Тогда

$$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln C_1,$$

$$\ln|\ln u-1|=\ln|C_1x|,$$

$$\ln u-1=\pm C_1x,$$

$$\ln\ =1\pm C_1x,\quad \text{или}$$

$$u=e^{1\pm C_1x}.$$

Таким образом, мы получили два решения:

$$u=e^{1+C_1x}\quad \text{и}\quad u=e^{1-C_1x}.$$

Если $C_1 = 0$, то ответом является функция $y = xe$. Легко убедиться, что эта функция будет также и дифференциального уравнения. В самом деле, подставляя

$$y=xe,\quad y'=e$$

в дифференциальное уравнение, находим:

$$xe=xe\ln\frac{\cancel{x}e}{\cancel{x}},$$

$$xe=xe\ln e,$$

$$xe=xe.$$

Таким образом, все решения дифференциального уравнения можно представить одной формулой:

$$y=xe^{1+Cx},$$

где C − произвольное действительное число.

Пример 3

Решить дифференциальное уравнение $\left(xy+y^2\right)y'=y^2$.

Решение.

Здесь мы снова встречаемся с однородным уравнением. В самом деле, запишем его в виде:

$$y'=\frac{y^2}{xy+y^2}=\frac{{y^2}/{x^2}}{\frac{xy}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{\left({y}/{x}\right)^2}{\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Сделаем подстановку $y = ux$. Тогда $y' = u'x + u$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем:

$$\left(xux+u^2x^2\right)\left(u'x+u\right)=u^2x^2,$$

$$ux^2\left(u+1\right)\left(u'x+u\right)=u^2x^2.$$

Разделим обе части уравнения на ux^2. Заметим, что корень $x = 0$ не является решением, но можно что корень $u = 0$ (или $y = 0$) будет одним из решений данного дифференциального уравнения.

В результате получаем:

$$(u+1)(u'x+u)=u,$$

$$u'x(u+1)+u^2+\cancel{u}=\cancel{u},$$

$$u'x(u+1)=-u^2, \quad \text{или}$$

$$\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}\right)du=-\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим общее решение:

$$\int\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}\right)du=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|u|-\frac{1}{u}=-\ln|x|+C.$$

Учитывая, что $u={}^{y}\!/_{x}$, последнее выражение можно записать в форме

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right|-\frac{1}{{}^{y}\!/_{x}}=-\ln|x|+C,$$

$$\ln|y|-\cancel{\ln|x|}-\frac{x}{y}=-\cancel{\ln|x|}+C,$$

$$y\ln|y|=Cy+x.$$

Обратная функция $x(y)$ имеет явный вид:

$$x=y\ln|y|-Cy.$$

Поскольку C − произвольное число, знак "минус" перед этой константой можно заменить на знак "плюс". Тогда получаем:

$$x=y\ln|y|+Cy.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение имеет решения:

$$x=y\ln|y|+Cy, \quad y=0.$$

Фронтальная практическая работа.

1. Решить линейные дифференциальные уравнения

1) $xy' - 2y = 2x^4$.

2) $(2x + 1)y' = 4x + 2y$

3) $(xy + e^x)dx - x\,dy = 0$.

4) $x^2y' + xy + 1 = 0$.

5) $y = x(y' - x\cos x)$.

6) $(xy' - 1)\ln x = 2y$.

2. Решите однородные дифференциальные уравнения

$$y'=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}.$$

$$\left(x^3+xy^2\right)y'=y^3$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 19

Контрольная работа № 2.

Цель: проверить знания и умения по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Вариант I	Вариант II
Задание 1. Найдите общий интеграл ДУ первого порядка с разделяющимися переменными	
а) $xy' - y = 0$; б) $(1 + x) \cdot y' = 2y + 1$.	а) $xy' - y = 0$; б) $(1 + x^2) \cdot y' + (1 + y^2) = 0$.
Задание 2. Найдите общий интеграл однородного ДУ первого порядка	
а) $xy' = 2y - x$; б) $x^2y' + 2xy = \ln x$.	а) $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$; б) $y'\sin x - y = 1 - \cos x$.
Задание 3. Найдите общий интеграл и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям	
$2y'\sqrt{x} = y$, $y = 1$ при $x = 4$.	$x^2y' + y^2 = 0$, $y = 1$ при $x = -1$.

Оценка «3» - задания №1, № 3;

оценка «4» - задания № 2, № 3;

оценка «5» - все задания.